特殊関数とその応用

藪下　信 著

森北出版株式会社

特殊関数とその応用

藪　下　　信著

森北出版株式会社

■本書の無断複写は，著作権法上での例外を除き禁じられています．
複写される場合は，その都度事前に(株)日本著作出版権管理システム
（電話 03-3817-5670，FAX 03-3815-8199）の許諾を得てください．

はしがき

本書は特殊関数の理論とその応用を概説したものである．大学理工系前期課程のカリキュラムに含まれる解析学（微積分学，級数論，フーリェ級数，ベクトル解析，複素関数論の初歩）の予備知識は読者にあるものとした．

特殊関数は理工学の諸問題を取り扱うさいに必要不可欠のものである．しかし従来出版されている書物では特殊関数の理論のみを扱っているか，応用面のみに重点がおかれているかであって，両面を同時に扱ったものは少ない．

本書では著者の経験から応用上必要と思われる関数の理論を概説し，同時にそれがどのように具体的問題に応用され得るかの説明を試みた．

取り扱った関数のうちガンマ・ベッセル・ルジャンドル関数の重要性は説明を必要としないであろう．エルミート関数は量子力学（調和振動子）と数値解析学への応用を考えて，またマシュー関数は量子力学と振動論への応用を考えて取り上げた．各種の楕円関数は特殊な問題にのみ応用されるので扱わなかった．応用としては熱伝導論とポテンシャル論に重点をおいた．理工学の多くの問題は形式的にこれらに帰着させられ，最も基本的と考えられるからである．

各章の終りに演習問題を与えてある．比較的難しいものと，容易なものが混淆しているが特殊関数についての理解に役立つと思われるので，読者は解くことを試みて欲しい．

最後に本書の執筆をおすすめいただいた池田峰夫教授と森北出版企画部の方々に感謝の意を表したい．

昭和50年7月

著　者

* 本書は 1975 年より 1990 年まで当社刊「数学ライブラリー・シリーズ」第 40 巻として発行していたものです

目　　次

1 章
ガンマ関数とベータ関数

1.1 定　　義

1.1.1 ガンマ関数の定義　特殊関数のいろいろな性質を導くためには，複素変数の関数として扱うと便利なことが多い．しかし実変数の関数として定義された特殊関数の初等的な性質をはじめに導き，そのあとで複素変数へと定義を拡張しよう．

x を正の実数としたときに，定積分

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \quad x > 0 \tag{1.1}$$

によって与えられる関数をガンマ関数という．この関数の最も基本的な性質は次のようにして導かれる．$\Gamma(x+1)$ を考えて，部分積分を行うと

$$\Gamma(x+1) = \Big[-e^{-t}t^x\Big]_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

となるが，第一項は 0 であるから

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0 \tag{1.2}$$

となる．これはガンマ関数の最も基本的な性質の一つである．

とくに (1.1) で $x=1$ とおけば

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$$

が得られる．n を正の整数としたとき，(1.2) をくり返し用いると

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n)\\ &= n(n-1)\Gamma(n-1)\\ &\ \ \vdots\\ &= n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1)\end{aligned}$$

となるが，すでに得た関係 $\Gamma(1)=1$ を用いれば

$$\Gamma(n+1)=n! \qquad (n:\ 整数) \tag{1.3}$$

という関係を得ることができる，ここに！は階乗を表わす記号である．このようにガンマ関数は階乗を一般化したものと見なすことができる．

1.1.2　ベータ関数の定義　ガンマ関数と密接な関係をもつものにベータ関数（オイラー（Euler）の積分ともよばれる）がある．それは，$p>0,\ q>0$ としたときに定積分

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \tag{1.4}$$

によって定義される．積分変数 t を $t=1-\tau$ によって τ に変換すると

$$B(p,q)=-\int_1^0 (1-\tau)^{p-1}\,\tau^{q-1}\,d\tau=B(q,p) \tag{1.5}$$

が得られる，いいかえれば $B(p,q)$ は p と q に関して対称である．同じようにして積分変数を

$$\tau=\frac{1-t}{t}$$

によってに変換すれば，(1.4) は次の形に表わすことができる；

$$B(p,q)=\int_0^\infty \frac{\tau^{q-1}}{(1+\tau)^{p+q}}\,d\tau. \tag{1.6}$$

ふたたび (1.4) で

$$t=\cos^2\theta \quad (0\leq\theta\leq\pi/2)$$

とおけば

$$B(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\,\sin^{2q-1}\theta\,d\theta \tag{1.7}$$

が得られる．とくに $p=1/2,\ q=1/2$ とおけばこの積分はかんたんに計算できて

$$B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\pi \tag{1.8}$$

となる．

1.1.3　ガンマ関数とベータ関数との関係　$x>1/2,\ y>1/2$ と仮定して，二つのガンマ関数の積

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^\infty e^{-u}u^{x-1}\,du\int_0^\infty e^{-v}v^{y-1}\,dv$$

を考えよう．u のかわりに u^2, v のかわりに v^2 とおけばこの積分の積は

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=4\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-u^2}u^{2x-1}\,du\int_0^R e^{-v^2}v^{2y-1}\,dv$$

$$=4\lim_{R\to\infty}\int_0^R\int_0^R e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\,dv\,du$$

となる．積分は1辺の長さが R である正方形の積分領域にわたっての二重積分である．図 1.1 で示すように，1辺 R の正方形を S_R, その内部にある半径 R の円の内部を Q_R, 斜線の部分を T_R とすれば

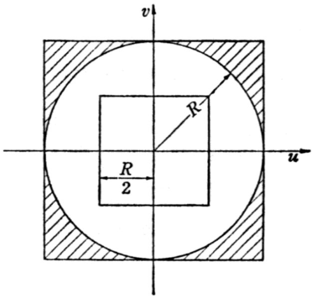


図 1.1

$$\int_{S_R}e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\,du\,dv$$

$$-\int_{Q_R}e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\,du\,dv$$

$$=\int_{T_R}e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\,du\,dv$$

ところが被積分関数は正であるから，T_R にわたっての積分は，S_R にわたっての積分と $S_{R/2}$ にわたっての積分の差よりも小である．それゆえ不等式

$$\int_{T_R}e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\,du\,dv<\int_{S_R}e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\,du\,dv$$
$$-\int_{S_{R/2}}e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\,du\,dv$$

が成り立つ．右辺にある二つの積分は $R\to\infty$ のとき同一の極限値

$$\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2x-1}\,du\cdot\int_0^\infty e^{-v^2}v^{2y-1}\,dv$$

をもつから，右辺は $R\to\infty$ のとき 0 に収束する．したがって

$$\lim_{R\to\infty}\int_{S_R}e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\,du\,dv=\lim_{R\to\infty}\int_{Q_R}e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\,du\,dv$$

という関係が成り立つ．右辺の積分を求めるために，(u,v) から極座標 (r,θ) に

$$u=r\cos\theta,\quad v=r\sin\theta$$

によって変換すれば

$$\lim_{R\to\infty}\int_{Q_R}e^{-(u^2+v^2)}\,u^{2x-1}\,v^{2y-1}\,du\,dv$$

$$=\int_0^\infty\int_0^{\pi/2}e^{-r^2}(r\cos\theta)^{2x-1}(r\sin\theta)^{2y-1}\,r dr\,d\theta$$

$$=\int_0^\infty e^{-r^2}\,r^{2x+2y-1}\,dr\int_0^{\pi/2}\cos^{2x-1}\theta\,\sin^{2y-1}\theta\,d\theta$$

となる．第一の積分は $\Gamma(x+y)/2$ であることは，ガンマ関数の定義 (*1.1*) からわかり，第二の積分は $B(x,y)/2$ である．こうして

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\Gamma(x+y)B(x,y) \tag{1.9}$$

という基本的な関係が得られた．

この関係を用いるといくつかの積分の値を求めることができる．(*1.9*) で $x=y=1/2$ とおけば，すでに得られれ結果 $\Gamma(1)=1$, $B(1/2,1/2)=\pi$ を用いて

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2=\pi$$

となるが，$x>0$ に対してガンマ関数は正の値をとるから，けっきょく

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

を得る．この結果と，(*1.2*) を用いれば

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\qquad n:\ \text{整数} \tag{1.10}$$

によって，x が半整数 $n+1/2$ であるときのガンマ関数の値が求められた．同じようにして，(*1.7*) と (*1.9*) から

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\,\sin^{2q-1}\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

が得られるが，$p=1/2$, $2q-1=r$ とおけばこの関係から積分公式

$$\int_0^{\pi/2}\sin^r\theta\,d\theta=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}$$

がただちに求められる．とくに重要なのは r が正整数 n に等しいときである．n が偶数のとき，(*1.10*) を用いれば右辺は

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{n-3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\Big/\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\cdots\frac{2}{2}$$

であるから

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2}\,\frac{(n-1)(n-3)\cdots3\cdot1}{n(n-2)(n-4)2}\quad n:\text{偶数}\qquad(1.11)$$

が得られる．n が奇数のときには同じようにして

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,d\theta=\frac{(n-1)(n-3)\cdots4\cdot2}{n(n-2)\cdots3\cdot1}\quad n:\text{奇数}\qquad(1.12)$$

という公式が導かれる．これら二つはウォリス (Wallis) の公式とよばれる．

さて $0<\theta<\pi/2$ であれば $0<\sin\theta<1$ であるから不等式

$$\sin^{2m-1}\theta>\sin^{2m}\theta>\sin^{2m+1}\theta\quad m:\text{正整数}$$

が成り立つ．この不等式の両辺を積分すれば

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\,d\theta>\int_0^{\pi/2}\sin^{2m}\theta\,d\theta>\int_0^{\pi/2}\sin^{2m+1}\theta\,d\theta$$

となる．それぞれの積分にウォリスの公式を用いると

$$\frac{(2m-2)(2m-4)\cdots4\cdot2}{(2m-1)(2m-3)\cdots3}>\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2m-1)(2m-3)\cdots3\cdot1}{2m\cdot(2m-2)\cdots2}>\frac{2m(2m-2)\cdots4\cdot2}{(2m+1)(2m-1)\cdots3}$$

という関係がでてくる．$2m\cdot(2m-2)\cdots2/(2m-1)\cdot(2m-3)\cdots3$ という因子をこの不等式に掛けて整理すれば

$$\left(1+\frac{1}{2m}\right)\frac{(2m)^2(2m-2)^2\cdots4^2\cdot2^2}{(2m+1)(2m-1)^2\cdots3^2}>\frac{\pi}{2}>\frac{(2m)^2(2m-2)^2\cdots4^2\cdot2^2}{(2m+1)(2m-1)^2\cdots3^2}$$

となる．因子 $(1+1/2m)$ は $m\to\infty$ のとき 1 に収束するからただちに

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{m\to\infty}\frac{(2m)^2(2m-2)^2\cdots4^2\cdot2^2}{(2m+1)(2m-1)^2(2m-3)^2\cdots3^2}\qquad(1.13)$$

という結果が得られることになる．

つぎに (*1.9*) で y のかわりに $1-x$ とおけば

$$\Gamma(1-x)\Gamma(x)=\int_0^\infty\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt,\quad 0<x<1$$

となるがこの積分の値は $\pi/\sin\pi x$ であるから，

$$\Gamma(1-x)\Gamma(x)=\frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad 0<x<1 \tag{1.14}$$

という結果が得られた．

1.2　複素変数への拡張

1.2.1　定義域の拡張　ガンマ関数は実変数の関数とし（*1.1*）で定義されたが，それの種々の性質を調べるには複素変数の関数として拡張定義しておくのが便利である．複素数

$$z=x+iy, \quad i^2=-1 \quad x, y\text{: 実数}$$

が与えられたとき，x, y をそれぞれの実数部，虚数部とよび

$$x=\boldsymbol{R}(z), \quad y=\boldsymbol{I}(z)$$

で表わす．z の絶対値は

$$|z|=(x^2+y^2)^{1/2}$$

によって，また偏角 θ は

$$\theta=\tan^{-1}(y/x)=\arg(z)$$

によって定義する．また (x, y) を座標とする平面を z-平面または複素平面とよぶ．複素数はしたがって，この平面上の1点で表わされる．

さて複素変数のガンマ関数を

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt \quad \boldsymbol{R}(z)>0 \tag{1.15}$$

によって定義する．この積分が任意の領域 $a<\boldsymbol{R}(z)<b$ $(a>0)$ で一様収束することは次のようにしてわかる．積分（*1.5*）を二つの部分

$$\int_0^1 e^{-t}\, t^{z-1}\, dt, \qquad \int_1^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$$

に分けて，$z=x+iy$ とおけば

$$\left|\int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt\right| \leq \int_0^1 e^{-1}\, t^{x-1}|t^{iy}|dt=\int_0^1 e^{-t}\, t^{x-1}\, dt<\int_0^1 e^{-t}\, t^{a-1}\, dt$$

が得られるが，最後の積分は存在し，しかも $x=\boldsymbol{R}(z)$ の値に依存しない．同じようにして第二の積分を考えると

$$\left|\int_1^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt\right| \leq \int_1^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt<\int_1^\infty e^{-t}\, t^{b-1}\, dt$$

となるが，最後の積分は存在して，しかも $\boldsymbol{R}(z)$ の値に依存しない．したがって積分 (*1.15*) は $a < \boldsymbol{R}(z) < b$ で一様に収束する．a, b は $0<a<b$ であるような任意の数であるから，その積分は $\boldsymbol{R}(z) > 0$ で一様に収束する．また被積分関数は $\boldsymbol{R}(z) > 0,\ 0 < t < \infty$ で連続であるから，積分 (*1.15*) は z の連続関数であることが結論できる．

(*1.15*) で定義されたガンマ関数は，1.1.1 項で行ったと同じようにして

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{1.16}$$

という関数を満たすことが示される．ガンマ関数はもともと $\boldsymbol{R}(z) > 0$ において定義されたのであるが，この漸化式を用いて $\boldsymbol{R}(z) < 0$ である z の値に対して拡張定義することができる．たとえば，(*1.16*)をくりかえし用いれば

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma(-1/2)}{(-3/2)} = \frac{\Gamma(1/2)}{(-3/2)(-1/2)} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

が得られる．$\boldsymbol{R}(z) < 0$ ではこのようにガンマ関数を定義することにする．ただ z が 0，または負の整数のとき (*1.16*) をくりかえし用いると，分母に 0 が現われるので，これらの値は除かれなければならない．こうしてガンマ関数は $z = 0,\ -1,\ -2,\ \cdots$ を除いた z-平面上のすべての点で定義されたことになる．

1.2.2 無限乗積による表現　ガンマ関数は無限乗積として表現することができる．そのために n を正整数としたとき

$$B_n(z) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\, dt \quad \boldsymbol{R}(z) > 0 \tag{1.17}$$

で与えられる関数を考える．$t = nv$ とおけば

$$B_n(z) = \int_0^1 (1-v)^n\, n^z\, v^{z-1}\, dv$$

となる．ところが部分積分によってつぎの関係が成り立つ；

$$\int_0^1 (1-v)^n v^{z-1}\, dv = \left[\frac{v^z}{z}(1-v)^n\right]_0^1 + \frac{n}{z}\int_0^1 v^z (1-v)^{n-1}\, dv.$$

部分積分をさらにつづけて行えば，この積分はつぎのようになる；

$$\int_0^1 (1-v)^n v^{z-1}\, dv = \frac{n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{z(z+1)(z+2)\cdots(t+n-1)}\int_0^1 v^{z+n-1}\, dv$$
$$= \frac{n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

したがって $B_n(z)$ は乗積

$$B_n(z)=\frac{n^z}{z}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1} \tag{1.18}$$

として表現される．ガンマ関数と $B_n(z)$ との関係を見るために

$$\Gamma(z)-B_n(z)=\int_0^n\left\{e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\}t^{z-1}\,dt+\int_n^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,dt$$

を考えよう．一般に

$$e^{-t}\geq 1-t,\qquad 0\leq t\leq 1$$

であるから，t のかわりに t/n とおいて n 乗すれば

$$e^{-t}\geq(1-t/n)^n,\qquad 0\leq t\leq n$$

となる．また $e^t\geq 1+t,\ t\geq 0$ であるから，同じようにして

$$e^t\geq(1+t/n)^n\quad t\geq 0$$

という方等式を得ることができる．これらの関係を使って不等式

$$0\leq e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n=e^{-t}\left\{1-e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\}\leq e^{-t}\left\{1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right\},\ 0\leq t\leq n$$

がみちびける．また数学的帰納法により

$$(1-t)^n\geq 1-nt$$

を示すことができる．これを用いると

$$1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\leq 1-\left(1-\frac{t^2}{n}\right)=\frac{t^2}{n}$$

という関係が得られる．これを用いれば

$$|\Gamma(z)-B_n(z)|\leq\int_0^n\frac{t^2}{n}\,e^{-t}\,t^{x-1}\,dt+\int_n^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\,dt,\quad z=x+iy$$

という不等式が導ける．第二の積分は $n\to\infty$ のとき 0 となる．第一項も

$$\frac{1}{n}\int_0^n t^{x+1}\,e^{-t}\,dt<\frac{1}{n}\Gamma(x+2)$$

という不等式からわかるように $n\to\infty$ のとき 0 に収束する．したがって

$$\lim_{n\to\infty}B_n(z)=\Gamma(z),\quad R(z)>0$$

という関係が得られた．$B_n(z)$ に (1.18) で与えられる表現を用いれば，この関係はまた

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{z}{n^z}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right) \tag{1.19}$$

と書くことができる．これをオイラー（Euler）の公式という．

この無限乗積による表示を変形しよう．あきらかに

$$n^{-z}=e^{-z\log n},\quad e^{z(1+1/2+1/3+\cdots+1/n)}\prod_{m=1}^{n}e^{-z/m}=1$$

であるから，オイラーの公式は

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty} ze^{-z\log n}\,e^{z(1+1/2+\cdots+1/n)}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-z/m}$$

と書くことができる．オイラーの定数 γ を

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}-\log n\right\}=0.577\,215\,664\cdots$$

で定義すれば，けっきょく

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-z/m} \tag{1.20}$$

という公式が得られる．これはワイアストラース（Weierstrass）の公式とよばれているもので，ガンマ関数を無限乗積で表わしたものである．

1.2.3 ガンマ関数の正則性 (*1.15*) で定義されたガンマ関数はその定義域 $\boldsymbol{R}(z)>0$ で z の連続関数であることは既に示した．さて z-平面のある領域で微分可能な関数を正則（または解析）関数とよんでいる．ここではガンマ関数が $\boldsymbol{R}(z)>0$ で z の正則関数であることを示そう．それにはいくつかの方法が考えられるが，モレラの定理（高木貞治，または Titchmarsh を参照）を用いるのがもっともかんたんである．

モレラ（Morera）の定理 関数 $f(z)$ が z-平面のある領域内で連続であり，その領域内の任意の閉曲線に沿った積分

$$\int f(z)\,dz$$

が 0 であれば，$f(z)$ を考えている領域で正則である．

さて積分 (*1.15*) は一様収束な積分であるから，C を $\boldsymbol{R}(z)>0$ にある任意の閉曲線としたとき

$$\int_C \Gamma(z)\,dz=\int_0^\infty e^{-t}\,dt\int_C t^{z-1}\,dz$$

である．ところが t^{z-1} は z の関数と見なしたとき，どの z の値に対しても微分可能であるから，コーシーの定理により，任意の閉曲線 C に対して

$$\int_c t^{z-1}\,dt=0$$

となり，上の積分も 0 となる．したがってモレラの定理により $\Gamma(z)$ は $R(z)>0$ で z の正則な関数である．

ガンマ関数の微係数はワイヤストラースの無限乗積（*1.20*）を使って求めることができる．両辺の対数微分をとれば（*1.20*）は

$$-\frac{1}{\Gamma(z)}\frac{d\Gamma(z)}{dz}=\frac{1}{z}+\gamma+\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{m+z}-\frac{1}{m}\right\}$$

となるが，これを書き直せば

$$\psi(z)\equiv\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma-\frac{1}{z}+z\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(m+z)} \qquad (1.21)$$

となる．これはプサイ関数とよばれている．

1.3　ガンマ関数の乗法公式

1.3.1　予備公式　　最初ガウス（Gauss）によって導かれた乗法公式を求めるために必要な準備をしておこう．n を正整数として代数方程式

$$\omega^n=1$$

を考える．この方程式は n 個の根をもつ．それらを $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$ とすればこの方程式を因数分解して恒等式

$$\omega^n-1=(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)\cdots\quad(\omega-\omega_n)$$

が得られる．ところが上の方程式の根は

$$\omega_k=e^{2\pi ki/n},\qquad k=1,2,\cdots,n$$

で与えられる．いま上の等式を（$\omega-1$）で割れば

$$\frac{\omega^n-1}{\omega-1}=(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)\cdots\quad(\omega-\omega_{n-1})$$

となる．一方

$$\frac{\omega^n-1}{\omega-1}=1+\omega+\omega^2+\cdots\omega^{n-1}$$

が成り立つから，ここで $\omega=1$ とおけば

$$n=(1-\omega_1)(1-\omega_2)\cdots\quad(1-\omega_{n-1})$$

という関係が得られる．また

$$1-\omega_k=e^{k\pi i/n}\left(-2i\sin\frac{k\pi}{n}\right)$$

であるから，これを上の関係式に代入すれば

$$n=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

となり，これを書き直して

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}} \tag{1.22}$$

という結果が得られることになる．

1.3.2 乗法公式　n を正整数とするとき，関数

$$\Phi(z)=\frac{n^{nz}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\dfrac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\dfrac{n-1}{n}\right)}{n\Gamma(nz)}$$

を考える．この関数の分母はオイラーの公式（*1.19*）を用いれば

$$分母=n\lim_{m\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdots m\cdot m^{nz}}{nz(1+nz)(2+nz)\cdots(m+nz)}$$

であるが，m のかわりに mn としてもよいから

$$分母=\lim_{m\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdots(nm)\cdot(nm)^{nz}}{nz(1+nz)(2+nz)\cdots(nm+nz)}$$

となる．一方，分子についてもオイラーの公式をそのまま用いると

$$分子=n^{nz}\prod_{r=0}^{n-1}\lim_{m\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdots m\cdot m^{z+r/n}}{\left(z+\dfrac{r}{n}\right)\left(z+1+\dfrac{r}{n}\right)\cdots\left(z+m+\dfrac{r}{n}\right)}$$

$$=n^{nz}(m!)^n\lim_{m\to\infty}n^{nm}m^{nz+(n-1)/2}\prod_{r=0}^{n-1}\frac{1}{(nz+r)(nz+n+r)\cdots(nz+nm+r)}$$

したがって分母分子を共通の因子で割れば

$$\Phi(z)=\lim_{m\to\infty}\frac{(m!)^n n^{nm}m^{(n-1)/2}}{(nm)!}$$

と変形される．ところが右辺は z とは無関係であるから，$\Phi(z)$ は定数でなければならない．したがって，z のある値における $\Phi(z)$ が求められれば，それが $\Phi(z)$ の値となる．$z=1/n$ とおけば

$$\Phi(1/n)=\Gamma(1/n)\Gamma(2/n)\cdots\Gamma((n-1)/n)$$

だから，両辺を自乗すれば

$$\Phi^2(z)=\prod_{r=1}^{n}\left\{\Gamma\left(\frac{r}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{r}{n}\right)\right\}$$

が得られるが，これは (*1.14*) によって

$$\Phi^2(z)=\frac{\pi^{n-1}}{\sin\dfrac{\pi}{n}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdots\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}}$$

と変形される．分母はすでに (*1.22*) で求められている．しかも $\Phi(z)$ は $z=1/n$ のとき，定義により正であるから $\Phi(z)=\{(2\pi)^{n-1}/n\}^{1/2}$ でなければならない．この値を定義式に用いると，けっきょく

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)=n^{1/2-nz}(2\pi)^{(n-1)/2}\Gamma(nz) \qquad (1.23)$$

という関係式が求められた．これはガウスの乗法公式である．とくに $n=2$ のときにはかんたんに

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)2^{1-2z} \qquad (1.24)$$

と書くことができる．これはガンマ関数の倍法公式とよばれている．ここで $z=1/2$ とすれば $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ というすでに求めた結果となる．

1.4　ガンマ関数のハンケル表示

1.4.1　複素積分による表示　　(*1.15*) で定義された複素変数 z の関数 $\Gamma(z)$ は半平面 $R(z)>0$ で正則な関数であるが，$R(z)<0$ の領域にも定義し拡張することは1.2.1項で考えたが，ここでは複素積分による方法を考えよう．まず

$$f(z)=\int_C e^{-t}(-t)^{z-1}\,dt \qquad (1.25)$$

で与えられる関数を考える．C は図 1.2 には示された積分路であり，また多価関数 $(-t)^{z-1}$ はつぎのように定義する．t を極座標

$$t=re^{i\theta}$$

によって表わし，$\log(-t)$ の定数

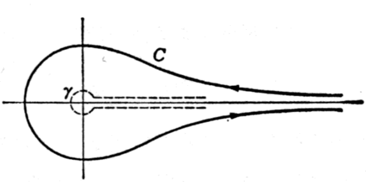


図 1.2

部と虚数部をそれぞれ u, v で表わす．対数関数の定義によって，(u, v) と (r, θ) の関係は

$$e^{u+iv} = -t = re^{i(\theta+\pi)}$$

である．これから

$$u = \log r \quad v = \theta + \pi + 2m\pi, \ m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

という関係が得られる．(r, θ) が与えられたときそれに対応する (u, v) は m の値によって異なる．(r, θ) と (u, v) を一対一に対応させるには m の値を定めておく必要がある．$m=0$ に対応する $\log(-t)$ の値を対数関数の主値とよぶが，ここでは $m=-1$ の分枝をとるものと約束しておく，そうすれば

$$(-t)^{z-1} = e^{(z-1)\log(-t)}$$

によって t と $(-t)^{z-1}$ が一対一に対応する．

(*1.25*) の被積分関数は有限な z の値に対しては，C の両端で十分速く 0 に近づくので，(*1.25*) の積分は z の任意の領域で一様収束する．したがってそれは z の全平面で正則関数である．

この積分とガンマ関数との関係を調べるには $R(z) > 0$ と仮定して，C を図の点線のようにとる．I に沿っては $t = re^{i\theta}$ としたとき $\theta = 0$ であるから

$$\int_{\mathrm{I}} = \int_{\infty}^{\delta} e^{-r} r^{z-1} e^{-\pi i(z-1)} dr$$

である．II 上では $\theta = 2\pi$ であるから

$$\int_{\mathrm{II}} = \int_{\delta}^{\infty} e^{-r} r^{z-1} e^{\pi i(z-1)} dr$$

となり，これら二つの和は

$$\int_{\mathrm{I}+\mathrm{II}} = -2i \sin \pi z \int_{\delta}^{\infty} e^{-r} r^{z-1} dr$$

である．γ 上では $z = \delta e^{i\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$ とおいて積分すれば

$$\int_{\gamma} = \int_{0}^{2\pi} e^{-\delta(\cos\theta + i\sin\theta)} \delta^{z} e^{i\theta z} i d\theta$$

となる．$R(z) > 0$ と仮定したから，これは $\delta \to 0$ の極限で 0 となる．したがって

$$\int_0^\infty e^{-t}\,t^{z-1}\,dt = -\frac{1}{2i\sin\pi z}\int_c e^{-t}\,(-t)^{z-1}\,dt, \quad R(z)>0 \qquad (1.26)$$

という結果が得られる．これはハンケル (Hankel) によるガンマ関数の積分表示である．

1.4.2　$R(z)\leq 0$ への解析接続　　z-平面のある領域 $\mathcal{D}_1$ で定義された正則な関数 $f_1(z)$ と，別の領域 $\mathcal{D}_2$ で定義された正則関数 $f_2(z)$ が与えられており，

$$\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$$

であるとする．このとき

$$f_1(z) = f_2(z) \quad z \in \mathcal{D}_1$$

であれば，$f_2(z)$ は $f_1(z)$ の解析接続によって得られた関数であるという．例として

$$f_1(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\,dt, \quad f_2(z) = 1/z$$

をとれば，$f_1(z)$ は $R(z)>0$ で z の正則関数であり，$f_2(z)$ は $z\neq 0$ で定義された正則関数である．したがって関数 $1/z$ は関数 $\int_0^\infty e^{-zt}\,dt$ を解析接続したものである．

また別の例として

$$f_1(z) = 1+z+z^2+\cdots, \quad f_2(z) = \int_0^\infty e^{-(1-z)t}\,dt, \quad f_3(z) = \frac{1}{1-z}$$

を考えれば，$f_1(z)$ は $|z|<1$ でのみ z の正則関数 $1/(1-z)$ にひとしい．$f_2(z)$ は $R(1-z)>0$ で z の正則関数であり，$f_3(z)$ は $z\neq 1$ で z の正則関数である．したがって $f_2(z)$ は $f_1(z)$ を解析接続したものであり，$f_3(z)$ は $f_2(z)$ から解析接続によって得られた関数である．このように，解析接続とはある領域で正則な関数が与えられたとき，それを含む領域で正則でしかももとの領域では与えられた関数と同じである関数を見出す操作のことである．ある正則関数から解析接続によって得られる関数は一意的に定まる（高木貞治，Titchmarsh を参照）．

さて (*1.15*) によって与えられるガンマ関数は $R(z)>0$ でのみ定義されているが，$R(z)>0$ のときそのガンマ関数と積分 (*1.25*) の間には (*1.26*)

が成り立つ．しかし（*1.26*）の右辺は負の整数を除けば z の正則な関数であるから，それは積分（*1.15*）を解析接続したものである．この関数をあらためてガンマ関数と定義する；

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i\sin\pi z}\int_c e^{-t}(-t)^{z-1}\,dt. \tag{1.27}$$

さて $\boldsymbol{R}(z)>0$ で成り立つガンマ関数の関係(*1.16*),(*1.24*)と z が $0<z<1$ である実数のときに得られた関係（*1.14*）が，より広い領域で成り立つかどうかを考えてみよう．いま（*1.27*）で定義される関数 $\Gamma(z)$ を使って

$$g(z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin\pi z}$$

によって定義される関数を考えると，それは $z \neq$ 整数である領域で正則な関数であり，しかも（*1.14*）から

$$g(z) = 0, \quad 0<z<1$$

が成り立つ．ところが，正則な関数がある曲線上で連続的に 0 であれば，その関数はいたるところ 0 である．したがって $g(z)$ はそれが定義されている領域でも 0 であるので

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z} \quad z \neq 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots \tag{1.28}$$

という結果が得られる．他の関数関係の成立する領域も同じように拡張できる．

演　習　問　題　[I]

1.　式（*1.21*）で定義されるプサイ関数の $z=1$ における値は

$$\psi(1) \equiv \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma$$

であることを示し，これからオイラーの定数 γ は定積分

$$\gamma = -\int_0^\infty e^{-t}\log t\,dt$$

により与えられることを示せ．

2.　$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin\pi z}, \quad z \neq \text{整数}$$

という関係の成り立つことを示し，これから

$$|\Gamma(iy)|^2=\frac{\pi}{y\sinh\pi y},\qquad (y：実数)$$

を示せ.

3. 定積分

$$\int_0^\infty\frac{\cosh 2yt}{(\cosh t)^{2x}}\,dt,\qquad x>y>0$$

の値をガンマ関数を用いて表わせ.

4. 積　分

$$\int_z^{z+1}\log\Gamma(t)\,dt$$

の値を計算せよ. [ヒント: 部分積分を行えば, これはプサイ関数の積分となる.]

5. 問題1で得られた結果を用いて, プサイ関数の $z=n$ (n: 正整数) における値は

$$\psi(n+1)=-\gamma+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n},\qquad n=1,2,3,\cdots$$

で与えられることを示せ.

6. プサイ関数の導関数は

$$\psi'(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+z)^2}$$

で与えられることを示せ.

2 章
ベッセル関数

2.1 ベッセルの微分方程式

2.1.1 ベッセル関数の始り　ベッセル関数は，惑星の運動を解析的に表現しようとするベッセル（Bessel）の研究にはじめて現われた．図 2.1 で示された楕円を惑星の軌道とする．図 2.1 のように定義される u, E をそれぞれ真近点離角，離心近点離角という．惑星の運動は太陽を一つの焦点とする楕円であり，そのまわりの面積速度は一定であるということから，ケプラー（Kepler）の方程式

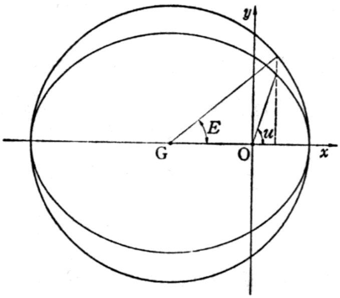


図 2.1　真近点離角 u と離心近点離角 E との関係．
O は楕円の焦点，G は外接円の中心

$$E-e\sin E=nt \qquad (2.1)$$

が導かれる，ここに e は楕円の離心率，n は平均運動（角速度），t は近日点通過後の時間を表わすものとする．惑星の位置を (x, y) とすれば

$$x=a(\cos E-e), \qquad y=a\sqrt{1-e^2}\sin E$$

という関係によってそれらは与えられるから，(x, y) を時間 t の関数として求めるには，まず E を nt を用いて表わす必要がある．(2.1) からわかるように nt が 2π だけ増せば E も 2π だけ増加する．したがって，$(1-e\cos E)^{-1}$ は nt の連続な周期関数となるので，それを一様収束なフーリエ（Fourier）級数として表現できる：

$$(1-e\cos E)^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}\{a_i\sin int+b_i\cos int\} \qquad (2.2)$$

ここでフーリエ係数 a_i, b_i はそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-e\cos E)^{-1}\sin(int)d(nt) \quad i=0,1,2,\cdots\cdot \\ b_i &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-e\cos E)^{-1}\cos(int)d(nt) \quad i=1,2,\cdots\cdot \\ b_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-e\cos E)^{-1}\,d(nt) \end{aligned}\right\} \quad (2.3)$$

定義される．ケプラーの方程式から $\cos E$ は nt の偶関数であるから，係数 $a_i(i=0,1,2,\cdots)$ は 0 となる．他方 b_i については

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-e\cos E)^{-1}\,(1-e\cos E)\,dE = 1,$$

$$b_i = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left[i(E-e\sin E)\right]dE \quad i=1,2,\cdots\cdot \qquad (2.4)$$

と表わせる．こうして係数が求められたと見なせば，ケプラーの方程式から

$$\frac{1}{1-e\cos E} = \frac{dE}{d(nt)} = 1+\sum_{i=1}^{\infty} b_i\cos(int)$$

が成り立つので，(nt) について両辺を積分すれば

$$E = nt+\sum_{i=1}^{\infty} i^{-1}\,b_i\sin(int)$$

となって，離心近点離角が nt のフーリエ級数とし求められたことになる．フーリエ係数 b_i はあきらかに，i と ie の関数であるから，それを ie の関数とみなしたときに満足する微分方程式を導いてみよう．

2.1.2　ベッセルの微分方程式　　まず $ie=x$ とおき，b_i のかわりに $f(x)$ と書くことにする．いま $xf'(x)$ を求めると

$$\begin{aligned} x\frac{df}{dx} &= \frac{2x}{\pi}\int_0^{\pi}\sin E\cdot\sin(iE-x\sin E)\,dE \\ &= \frac{2x}{\pi}\int_0^{\pi}(i-x\cos E)\cos(iE-x\sin E)\cos E\cdot dE \end{aligned}$$

となる．同じようにして

$$x^2\frac{d^2f}{dx^2}+(x^2-i^2)f = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(iE-x\sin E)\left[x^2\cos^2 E-i^2\right]dE$$

これら二つの等式を加えると

$$x^2\frac{d^2f}{dx^2}+x\frac{df}{dx}+(x^2-i^2)f = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(iE-x\sin E)(ix\cos E-i^2)dE = 0$$

すなわち

$$\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{df}{dx}+\left(1-\frac{i^2}{x^2}\right)f=0$$

という微分方程式が得られた．これをベッセルの微分方程式とよび，この方程式の解を一般にベッセル関数とよんでいる．フーリエ係数 (2.4) はしたがってベッセル関数の一つであって，のちに示すようにそれは第一種ベッセル関数であることがわかる．

2.2 ベッセル関数の級数表示

2.2.1 第一種ベッセル関数　z-平面上で与えられたベッセルの微分方程式

$$\frac{d^2f}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{df}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)f=0 \tag{2.5}$$

の級数による解を求めよう．ここで ν は定数である．$z=0$ のまわりの級数解を得るために

$$f(z)=z^\alpha\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^m$$

と仮定して係数 $a_0, a_1, \cdots$ と指数 α を係数比較によって求めてみよう．もしそうして得られた級数が収束すれば，それは(2.5)の一つの解となっている．

$$f''(z)=\sum_{m=0}^{\infty}(\alpha+m)(\alpha+m-1)a_i z^{\alpha+m-2},\quad f'(z)=\sum_{m=0}^{\infty}(\alpha+m)a_i z^{\alpha+m-1}$$

をもとの微分方程式に代入すれば

$$\sum_{m=0}^{\infty}\{(\alpha+m)(\alpha+m-1)+(\alpha+m)-\nu^2\}a_m z^{\alpha+m-2}+\sum_{i=0}^{\infty}a_m z^{\alpha+m}=0$$

が得られる．この方程式が成り立つには z の各べき係数が 0 とならなくてはならない．最低次の $z^{\alpha-2}$ の係数から指数決定式

$$\alpha^2-\nu^2=0 \tag{2.6}$$

が導かれ，これから $\alpha=\pm\nu$ となる．$z^{\alpha-1}$ の係数比較から $a_1=0$ となる．また一般のべき $z^{\alpha+m}$ の係数を 0 とおけば漸化式

$$\{(\alpha+m)^2-\nu^2\}a_m+a_{m-2}=0$$

が得られる．$a_1=0$ であるからこの漸化式から $a_3, a_5, \cdots$ はすべて 0 でなければならない．いま指数決定式の根のうち $\alpha=\nu$ をとれば，この漸化式

をくりかえし用いて

$$a_{2m'}=\frac{(-1)^{m'}\Gamma(\nu+1)a_0}{2^{2m'}m'!\,\Gamma(m'+\nu+1)}\quad m'=1,2,\cdots.$$

という関係を導ける．したがって，$a_0=[2^{\nu}\Gamma(\nu+1)]^{-1}$ とえらべば一般項の係数は

$$a_{2m'}=\frac{(-1)^{m'}}{2^{2m'+\nu}\,m'!\,\Gamma(m'+\nu+1)}$$

で与えられることになり，求める級数解は

$$f(z)=J_{\nu}(z)\equiv\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}\qquad(2.7)$$

となる．これは ν 次の第一種ベッセル関数とよばれている．指数決定式のもう一つの根 $\alpha=-\nu$ に対する解は $J_{\nu}(z)$ で ν のかわりに $-\nu$ とおいたものに等しい，それを $J_{-\nu}(z)$ で表わそう．ν が正整数でないとき $J_{\nu}(z)$ と $J_{-\nu}(z)$ は 1 次独立であるから，それらはベッセル微分方程式の基本解である．しかし ν が正整数 n に等しいとき $J_n(z)$ と $J_{-n}(z)$ とは互いに 1 次独立ではないので，$J_n(z)$ とは独立な他の解を求める必要がある．ここではまず

$$J_{-n}(z)=J_n(z)(-1)^n\quad n:\ 整数$$

という関係を示そう．級数解（2.7）で $\nu\to-n$ とすれば

$$\lim_{\nu\to-n}\frac{1}{\Gamma(\nu+m+1)}=0\quad m\leq n-1$$

それゆえ

$$J_{-n}(z)=\lim_{\nu\to-n}J_{-\nu}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$
$$=\left(\frac{z}{2}\right)^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(-1)^k}{k!\ (n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

となり，これは $(-1)^nJ_n(z)$ にほかならない．

第一種ベッセル関数（2.7）に現われる z のべき級数 $(z/2)^{-\nu}J_{\nu}(z)$ を考えて，その級数の収束半径を係数比較から求めると，無限大となる．したがってこの級数は z のすべての有限値に対して正則な関数である．

2.2.2　第二種ベッセル関数　　ベッセルの微分方程式の二つの独立な解はす

でに求めた $J_\nu(z)$ と $J_{-\nu}(z)$ であって，これらを基本解としてとることができる．しかし ν が整数 n にひとしいとき，$J_n(z)$ と $J_{-n}(z)$ は互いに独立ではなくなるので，$J_n(z)$ のほかに，それとは独立な解を求めなくてはならない．その目的のためには $J_\nu(z)$ と

$$Y_\nu(z)=\frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \tag{2.8}$$

で定義される二つの関数を基本解ととるのが便利である．この関数はあきらかにベッセル微分方程式の解である．ν が n にひとしいとき，極限操作

$$Y_n(z)=\lim_{\nu\to n}\frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \tag{2.9}$$

によって $Y_n(z)$ を定義すれば，この $Y_n(z)$ は $J_n(z)$ とは独立で，またベッセル微分方程式を満足する．したがって任意の ν に対して基本解として $J_\nu(z)$ と $Y_\nu(z)$ をとり，$\nu=n$ のときは $Y_n(z)$ は (2.9) を意味することと約束しておこう．こうして定義された $Y_n(z)$ は第二種ベッセル関数とよばれている．この関数の級数による表現を定義式 (2.9) に従って求めよう．

(2.9) で $\nu\to n$ とすれば分母・分子とも 0 となって不定形となるので，それぞれを ν について微分したのちに極根操作を行う．そうすると

$$\begin{aligned}Y_n(z)&=\frac{1}{\pi\cos n\pi}\left\{-\pi\sin n\pi\,J_n(z)+\cos n\pi\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}-\left[\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}\right\}\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}-\frac{(-1)^n}{\pi}\left[\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=-n}\end{aligned} \tag{2.10}$$

となる．第一項を実際に計算すれば，(2.7) を用いて

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z)&=\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}\right\}\\&=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\log\frac{z}{2}\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}\\&\quad+\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!}\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{\Gamma(\nu+m+1)}\right]\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}\end{aligned}$$

となる．1.2.3 項で

$$\psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

として定義された関数 $\psi(z)$ を用いればこの結果は

$$\left[\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z)\right]_{\nu=n}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(n+m+1)}\left\{\log\frac{z}{2}-\psi(n+m+1)\right\}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} \tag{2.11}$$

と表わすことができる．つぎに（*2.10*）の第二項を求めるために $J_{-\nu}(z)$ を

$$J_{-\nu}(z)=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2m}+\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2m}$$

のように分ける，ここで $\nu<n$ である．第二項の ν についての微分は前と同じように行えるが，第一項をそのまま微分すれば不定形が得られる．そのことをさけるために，まず

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

というガンマ関数の公式を用いると

$$\frac{1}{\Gamma(-\nu+m+1)}=\frac{\Gamma(\nu-m)\sin(\nu-m)\pi}{\pi}$$

が得られる．したがって $0\leq m<n$ であれば

$$\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2m}\frac{\Gamma(\nu-m)\sin(\nu-m)\pi}{\pi}\right\}\right]_{\nu=n}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2m}\Gamma(\nu-m)\{\psi(\nu-m)\sin(\nu-m)\pi+\pi\cos(\nu-m)\pi\right.$$

$$\left.-\log\frac{z}{2}\sin(\nu-m)\pi\}\right]_{\nu=n}=\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m}\Gamma(n-m)\cos(n-m)\pi$$

となる．この等式を用いると

$$\left[\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(z)\right]_{\nu=n}=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^m(-1)^{n-m}\Gamma(n-m)}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m}$$

$$+\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m-n)!}\left\{-\log\frac{z}{2}+\psi(m-n+1)\right\}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m}$$

第二の総和記号で $m=n+k$ とおけば

$$=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^n\Gamma(n-m)}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!k!}\left\{-\log\frac{z}{2}+\psi(k+1)\right\}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}$$

となって，（*2.10*）の第二項が求められた．この表式と（*2.11*）とから

$$Y_n(z)=\frac{2}{\pi}J_n(z)\log\frac{z}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m}$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi(m+1)+\psi(n+m+1)}{m!(m+n)!}(-1)^m\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}\qquad(2.12)$$

という結果が求められる．これが第二種ベッセル関数 $Y_n(z)$ の級数表示である．これはノイマン (Neumann) 関数ともよばれる．

2.3 ハンケルの積分変換

2.3.1 第一種ベッセル関数の積分表示　すでに 2.1.2 項で示したように定積分 (*2.4*) はベッセルの微分方程式の解となっているから，それは J_n と Y_n を用いて表わすことができるはずである．積分 (*2.4*) とベッセル関数との関係を求めるために，定積分

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iz\cos t}\,e^{in(t-\pi/2)}\,dt\qquad(2.13)$$

を考えよう．ここで n は正整数としておく．まず指数関数の展開公式

$$e^{iz\cos t}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(iz\cos t)^m}{m!}$$

と，二項展開を用いて求められる関係

$$\cos^m t=\left[\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right]^m=\left(\frac{1}{2}\right)^m\sum_{r=0}^{m}{}_mC_r\,e^{irt}\,e^{-i(m-r)t}$$

に注意する，ただし ${}_mC_r$ は二項係数 $m!/r!(m-r)!$ である．これらの表式を (*2.13*) に代入すれば

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(iz)^m}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^m\sum_{r=0}^{m}{}_mC_r\int_{-\pi}^{\pi}e^{in(t-\pi/2)}\,e^{irt}\,e^{-i(m-r)t}\,dt$$

となる．t についての積分の値は

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{it(n+r-m+r)}\,dt=\begin{cases}0 & n+2r-m\neq 0\\ 2\pi & n+2r-m=0\end{cases}$$

であるから r に関する総和の中で $r=(m-n)/2$ の項のみが残り，他はすべて 0 となる．ゆえに $f(z)$ は

$$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^m\frac{(iz)^m}{m!}\,e^{-in\pi/2}\,{}_mC_{(m-n)/2}$$

と表わされる．ここでまた $(m-n)/2=p$ とおけば

$$ {}_mC_{(m-n)/2} = {}_{2p+n}C_p = \frac{(2p+n)!}{p!(p+n)!} $$

であるから，$f(z)$ は

$$ f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p+n} \frac{i^{2p}}{(2p+n)!} \frac{(2p+n)!}{p!(p+n)!} $$
$$ = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} $$

となる．これは第一種ベッセル関数 (*2.7*) で $\nu=n$ の場合にほかならない．したがって

$$ J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\cos t} e^{in(t-\pi/2)} dt \qquad (n\text{: 正整数}) \qquad (2.14) $$

という重要な関係が求められた．これをベッセル関係の積分表示といっている．被積分関数は t の周期 2π をもつ周期関数であるから，積分の上限と下限の差が 2π であるかぎり上限と下限をどのようにとっても積分の値はかわらない．そこで $t-\pi/2$ のかわりに t とおけば (*2.14*) は

$$ J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iz\sin t} e^{int} dt \qquad (n\text{: 正整数}) $$

と書くこともできる．被積分関数を三角関数を用いて表わせば

$$ \cos(nt - z\sin t) + i\sin(nt - z\sin t) $$

となるが第二項は t の奇関数だから $(-\pi, \pi)$ で積分すれば 0 となる．したがって (*2.14*) から

$$ J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt - z\sin t)\, dt \qquad (n\text{: 正整数}) \qquad (2.15) $$

が得られる．この積分表示と (*2.4*) を比較すれば

$$ b_i = 2J_i(ie) $$

であることがわかる．このようにして，惑星運動の離心近点離角を平均運動のフーリエ級数で表わしたとき，係数は第一種ベッセル関数となっていることが示された．

2.3.2　ハンケルの積分変換　第一種ベッセル関数を用いてフーリエの積分変換と類似の変換公式を求めることができる．ある与えられた関数 $f(x, y)$ は x, y の連続で有界変動な関数であり，またすべての x, y に対して積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x,y)|dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x,y)|dy$$

が存在するとしよう．y をパラメターとみなして $f(x,y)$ をフーリエ積分で表わせば

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,y)e^{i\omega(x-\xi)}\,d\xi\,d\omega$$

が得られる．つぎに ξ をパラメターとみなして $f(\xi,y)$ をフーリエ積分で表せば

$$f(\xi,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta)e^{i\omega'(y-\eta)}\,d\eta\,d\omega'$$

となるから，これを上の等式に代入すれば $f(x,y)$ が二重フーリエ積分

$$f(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta)e^{i\omega(x-\xi)+i\omega'(y-\eta)}\,d\omega\,d\omega'\,d\xi\,d\eta$$

として表される．ここで直交座標から座標変換

$$x=r\cos\varphi,\qquad \xi=\rho\cos\phi,\qquad \omega=\sigma\cos\alpha,$$
$$y=r\sin\varphi,\qquad \eta=\rho\sin\phi,\qquad \omega'=\sigma\sin\alpha,$$

によって極座標にうつすことにする．そうすれば

$$\omega x+\omega' y=\sigma r\cos(\alpha-\varphi),$$
$$\omega\xi+\omega'\eta=\sigma\rho\cos(\phi-\alpha),$$

という関係がなりたつ．またこの変換のヤコビアンはかんたんに計算できて

$$d\xi\,d\eta=\rho\,d\rho\,d\phi,\qquad d\omega\,d\omega'=\sigma\,d\sigma\,d\alpha$$

となる．とくに関数 $f(x,y)$ が

$$f(x,y)=g(r)e^{in\varphi}\qquad (n\text{: 整数})$$

という形をしている場合を考えれば二重フーリエ積分は

$$g(r)e^{in\varphi}=\int_0^\infty\sigma\,d\sigma\int_0^\infty g(\rho)\rho\,d\rho\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\sigma r\cos(\alpha-\varphi)}\,d\alpha\times\right.$$
$$\left.\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\phi}\,e^{-i\sigma\rho\cos(\phi-\alpha)}\,d\phi\right\}$$

となる．かっこの中の第二の積分で $\phi-\alpha=t$ とし，被積分関数が ϕ の周期 2π をもつ周期関数であることに注意すれば

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\phi}\, e^{-i\sigma\rho\cos(\phi-\alpha)}\, d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\sigma\rho\cos t}\, e^{in(t+\alpha)}\, dt$$

公式 (*2.14*) を用いて

$$= e^{in\pi/2}\, e^{in\alpha} J_n(-\sigma\rho) = e^{in\pi/2+in\alpha}(-1)^n J_n(\sigma\rho)$$

を得る．同じようにして最初の積分も求められる；

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\sigma r\cos(\alpha-\varphi)}\, e^{in\alpha}\, d\alpha = e^{in\pi/2+in\varphi} J_n(\sigma r).$$

したがって，これら二つの積分を上の等式に用いるとけっきょくハンケルの公式

$$g(r) = \int_0^\infty \sigma d\sigma \int_0^\infty g(\rho) J_n(\sigma r) J_n(\sigma\rho)\rho d\rho \tag{2.16}$$

が得られる．この関係は

$$\left.\begin{aligned} g(r) &= \int_0^\infty h(\sigma) J_n(\sigma r)\sigma d\sigma \\ h(\sigma) &= \int_0^\infty g(\rho) J_n(\sigma\rho)\rho d\rho \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

とも書くことができる．第二の関係は関数 g の積分変換 h を与えるものと考えれば，第一の式が h を g にもどす逆変換とみなすことができる．その意味で $h(\sigma)$ を $g(r)$ のハンケル変換とよんでいる．なおより詳しい考察によって，ハンケルの定理を証明することができることをつけ加えておこう．

定理　$f(r)$ が有界変動の関数であり，また $\int_0^\infty |f(r)|dr$ が存在すれば

$$\frac{1}{2}\{f(r+0)+f(r-0)\}$$

$$= \int_0^\infty J_\nu(r\sigma)\sqrt{r\sigma}\, d\sigma \int_0^\infty J_\nu(\sigma\rho)\sqrt{\sigma\rho}\, f(\rho)d\rho,\ \nu \geq -\frac{1}{2} \tag{2.18}$$

が成り立つ．

ハンケル変換は応用面で重要なものである．あとの章ではいくつかの数理物理学の問題への応用について考えることにしよう．

2.3.3 ポアッソンの積分表示　ハンケルの公式を導くためにベッセル関数の積分表示 (*2.14*) を用いたが，これと類似の積分によってもベッセル関数を表わすことができる．まず級数表現 (*2.7*) の一般項を考えると

$$\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}$$

$$=\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\frac{(-1)^m}{\Gamma(\nu+m+1)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(2m)!}z^{2m}$$

$$=\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\frac{(-1)^m}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{z^{2m}}{(2m)!}B\left(\nu+\frac{1}{2},\ m+\frac{1}{2}\right)$$

ただし，ガンマ関数とベータ関数の間の関係 (*1.9*) を用いた．一方ベータ関数の定義

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \qquad p,q>0$$

を使えば上の表式は

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\frac{(-1)^m}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{z^{2m}}{(2m)!}\int_0^1 t^{\nu-1/2}(1-t)^{m-1/2}\,dt \quad \nu+1/2>0$$

となり，これを m について総和をとったものがベッセル関数 $J_\nu(z)$ である．

さて無限級数

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)\,z^{2m}}{(2m)!}t^{\nu-1/2}(1-t)^{m-1/2}$$

は $0<t<1$ で一様収束する．したがってこの級数の和を (0, 1) で積分した値と，各項を (0, 1) で積分し，その和をとったものとは等しい．また $m=0$ としたときの積分 $\int_0^1(1-t)^{-1/2}\,t^{\nu-1/2}\,dt$ は存在する．ベッセル関数 $J_\nu(z)$ はこうして

$$J_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\int_0^1\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}z^{2m}\,t^{\nu-1/2}(1-t)^{m-1/2}\,dt, \quad \nu+\frac{1}{2}>0$$

の形をとる．積分記号内の級数について考えると

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m z^{2m}(1-t)^{m-1/2}/(2m)!=(1-t)^{-1/2}\cos\left[z(1-t)^{1/2}\right]$$

であるから，これを上の等式に用いれば

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \times$$

$$\int_0^1 t^{\nu-1/2}(1-t)^{-1/2}\cos\left[z(1-t)^{1/2}\right]dt, \quad \nu+\frac{1}{2}>0 \qquad (2.19)$$

という結果が得られる．ここで $t=\sin^2\theta$ と変数変換すればつぎのようになる；

$$\left.\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\pi \cos(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\, d\theta \\ &= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi/2} \cos(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\, d\theta \end{aligned}\right\}, \ \nu+\frac{1}{2}>0. \qquad (2.20)$$

(2.20) はポアッソン(Poisson)の積分表示とよばれている．一方，(2.19) で $1-t=\xi^2$ と変数をとりなおせば

$$\int_0^1 t^{\nu-1/2}(1-t)^{-1/2}\cos\left[z(1-t)^{1/2}\right]dt = 2\int_0^1 (1-\xi^2)^{\nu-1/2}\cos z\xi\, d\xi,$$

という関係に注目して

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{\nu-1/2} e^{iz\xi}\, d\xi, \ \ \nu+\frac{1}{2}>0 \quad (2.21)$$

という表現も得られる．

2.4　ベッセル関数の漸化式

2.4.1　第一種ベッセル関数の漸化式　　第一種ベッセル関数

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

にはいくつかの漸化関係が成り立つことが知られている．いまそれらを導いてみよう．まず $J_{\nu-1}(z)+J_{\nu+1}(z)$ を考えて上の級数表示を用いると

$$J_{\nu-1}(z)+J_{\nu+1}(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m-1}$$
$$-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m-1)!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m-1}$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left\{\frac{1}{m!\Gamma(\nu+m)}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(m-1)!\Gamma(\nu+m+1)}\right\}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m-1}$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\nu(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m-1}$$

これと $J_\nu(z)$ とを比較してただちに

$$J_{\nu-1}(z)+J_{\nu+1}(z)=\frac{2\nu}{z}J_\nu(z) \tag{2.22}$$

が得られる．その次に $J_\nu(z)$ の z についての微係数を考えると

$$\frac{dJ_\nu(z)}{dz}=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\nu+2m)}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu-1}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu-1}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m-1)!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu-1}$$

となる．最初の級数は $J_\nu(z)$ と比較して $J_{\nu-1}(z)/2$ であることがただちにわかる．第二の級数については

$$\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m-1)!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu-1}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!\Gamma(\nu+k+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu+1}=-\frac{1}{2}J_{\nu+1}(z)$$

となる．こうして

$$J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)=2J_\nu'(z)$$

という関係が得られる．上式と (2.22) を組み合わせて次の二つの関係式

$$\left.\begin{aligned} z\,J_\nu'(z)+\nu\,J_\nu(z)&=z\,J_{\nu-1}(z)\\ z\,J_\nu'(z)-\nu\,J_\nu(z)&=-z\,J_{\nu+1}(z)\end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

が導かれる．これらすべてはベッセル関数の漸化式とよばれているものである．

2.4.2　第二種ベッセル関数の漸化式　　第二種ベッセル関数

$$Y_\nu(z)=\frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

について考えよう．まず $Y_{\nu-1}(z)+Y_{\nu-1}(z)$ に漸化式（*2.21*）を用いれば

$$\begin{aligned}Y_{\nu-1}(z)+Y_{\nu+1}(z)&=\frac{J_{\nu-1}(z)\cos(\nu-1)\pi-J_{-\nu+1}(z)}{\sin(\nu-1)\pi}\\&\quad+\frac{J_{\nu+1}(z)\cos(\nu+1)\pi-J_{-\nu-1}(z)}{\sin(\nu+1)\pi}\\&=(\sin\nu\pi)^{-1}\{[J_{\nu-1}(z)+J_{\nu+1}(z)]\cos\nu\pi+J_{-\nu+1}(z)+J_{-\nu-1}(z)\}\\&=\frac{1}{\sin\nu\pi}\left\{\frac{2\nu}{z}[\cos\nu\pi\,J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)]\right\}=\frac{2\nu}{z}Y_\nu(z)\end{aligned}$$

すなわち

$$Y_{\nu-1}(z)+Y_{\nu+1}(z)=\frac{2\nu}{z}Y_\nu(z)$$

が得られた．同じようにして次の漸化式が導かれる；

$$\left.\begin{aligned}Y_{\nu-1}(z)-Y_{\nu+1}(z)&=2Y_\nu'(z)\\z\,Y_\nu'(z)+\nu\,Y_\nu(z)&=z\,Y_{\nu-1}(z)\\z\,Y_\nu'(z)-\nu\,Y_\nu(z)&=-z\,Y_{\nu+1}(z).\end{aligned}\right\}\qquad(2.24)$$

2.5　2階常微分方程式のいくつかの性質

2.5.1　2階常微分方程式の標準形　　ベッセルの微分方程式は2階の線形微分方程式であるからそれの一般論を応用することができる．2階の線形常微分方程式は

$$\frac{d^2u}{dz^2}+p(z)\frac{du}{dz}+q(z)u=0$$

の形に表わすことができる．いまこれを標準形とよばれるものに変形しよう．u の代りに

$$u(z)=U(z)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int p(z)\,dz\right\}\qquad(2.25)$$

で与えられる別の関数 U を用いると，上の方程式は

$$\frac{d^2U}{dz^2}+J(z)U=0 \tag{2.26}$$

$$J(z)=q(z)-\frac{1}{2}\frac{dp}{dz}-\frac{1}{4}[p^2(z)]$$

と表わすことができる．(*2.26*) を2階微分方程式の標準形という．(*2.26*) の U とは別の解を V で示せば，それに対応する v は (*2.25*) で u のかわりに v とおいて得られる．V は (*2.26*) と同一の方程式

$$V''+JV=0$$

を満たすから，これら二つの方程式にそれぞれ V, U を掛けて $J(z)UV$ を消去すれば

$$\frac{d^2U}{dz^2}V-U\frac{d^2V}{dz^2}=0$$

が得られる．この方程式はかんたんに積分できて

$$V\frac{dU}{dz}-U\frac{dV}{dz}=\text{定数}=c \tag{2.27}$$

となる．左辺のことを関数 U, V のロンスキー (Wronsky) 行列式，またはたんにロンスキアンとよんでいる．もし，U, V が互いに1次独立であれば，このロンスキアンは 0 ではあり得ない：もし $c=0$ であれば，(*2.27*) をふたたび積分して

$$U(z)=c'V(z) \qquad (c'\text{：定数})$$

が得られるが，これは V, U が1次独立ではないことを示しているからである．さて (*2.26*) の一つの解 $U(z)$ が求められたとしよう．このとき (*2.27*) を書きなをせば

$$U^2\frac{d}{dz}\left(\frac{V}{U}\right)=c$$

となるからこれを積分して

$$\frac{V}{U}=c\int^z\frac{dz}{U^2(z)}+d \quad (d\text{：積分定数})$$

あるいは

$$V=cU\int^z U^{-2}\,dz+dU, \quad c\neq 0$$

が得られる．こうして求めた V は U とは1次独立である．なぜなら U, V のロンスキアンの値 c は 0 とは異なるからである．なお，もとの従属変数 u, v にもどせば上の関係は

$$v(z)=cu(z)\int^{z}u^{-2}(z)\exp\left[-\int^{z}p(z)dz\right]dz+du(z)$$

となることをつけ加えておこう．

2.5.2　スツルムの比較定理　　実変数 x の関数 u, v はそれぞれ微分方程式

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx^2}+h(x)u=0\\ \frac{d^2v}{dx^2}+g(x)u=0\end{aligned}\right\}\tag{2.28}$$

の解であるとし，$h(x)$, $g(x)$ は x の連続関数であると仮定しよう．第一の方程式に v，第二に u を乗じて引算すれば

$$\frac{d}{dx}\left[v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right]+uv[h(x)-g(x)]=0$$

が得られる．$u(x)$ の二つの零点を $x=a$, $x=b$ として，(a, b) では u は 0 にならないとし，また $u'(a)\neq 0$, $u'(b)\neq 0$ と仮定する．この等式を積分すれば，仮定によって

$$\left[v\cdot\frac{du}{dx}\right]_{x=a}^{x=b}=\int_a^b[g(x)-h(x)]uv\,dx\tag{2.29}$$

となる．一般性を失うことなく

$$u(x)>0\quad a<x<b$$
$$u'(a)>0$$
$$u'(b)<0$$

としてよい．さらに

$$g(x)\geq h(x)\quad a<x<b$$

と仮定しよう．そうすれば $v(x)$ は (a, b) で少なくとも1回，符号をかえなくてはならない．証明はかんたんである．v が (a, b) で定符号（かりに正）であれば，(2.29) の右辺は正または 0 である．他方

$$左辺=v(b)u'(b)-v(a)u'(a)<0$$

となって，矛盾するからである．こうしてスツルム (Sturm) の比較定理が

導かれた.

定理　常微分方程式 (2.28) の一つの解 $u(x)$ のとなり合う零点を $x=a$, $x=b$ とし, $a<x<b$ では $g(x)\geq h(x)$ が成り立つとする. そうすれば (a,b) には他の解 $v(x)$ の零点が少なくとも一つ存在する.

この定理の特殊な場合として $h(x)\equiv g(x)$ が考えられる. このとき u と v は同一の微分方程式の解である. したがってスツルムの定理を用いれば, 2 階常微分方程式（標準形）の二つの基本解のうち, 一つの解関数が二つの零点をもてば, 他の解関数もそれらの間に少なくとも一つの零点をもつことが導かれるのである.

これらの結果は標準形をした微分方程式について得られたが, もう少し一般化をすることができる. (2.28) のかわりに

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]+h(x)u=0,\quad \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dv}{dx}\right]+g(x)v=0$$

を考えると, 前と同じようにして

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)v\frac{du}{dx}-p(x)u\frac{dv}{dx}\right]+[h(x)-g(x)]uv=0$$

が成り立つ. したがってもし $p(x)$ が考えている x の変域で一定符号であれば, スツルムの結果がそのまま成り立つことは容易にわかる.

ベッセルの微分方程式は, 実際このような形をしている. (2.5) を書きなをせば, z のかわりに x として

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{df}{dx}\right)+\left(x-\frac{\nu^2}{x}\right)f=0$$

となって, $p(x)=x$ は, $(0,\infty)$ で定等号である. この方程式の解 $J_\nu(x)$ は $(0,\infty)$ で無限個の零点をもつことを証明できる. 第二の解 $Y_\nu(x)$ はスツルムの定理によって, それらのとなり合う零点の間に, 一つずつ零点をもつことになる. $J_\nu(x)$ のとなり合う零点の間に $Y_\nu(x)$ は一つの零点しかもち得ないことも容易に示される. もし二つもてばスツルムの定理からそれらの間に $J_\nu(x)$ がさらに一つ零点を持たねばならなくなるからである.

2.6 ベッセル関数の数値

2.6.1 第一種ベッセル関数　物理・化学・工学の諸分野の問題の解を具体的に求めるときには，どうしても特殊関数が幅広く用いられるが，それらの解を数値を用いて表わす必要が最後には出てくる．そのためには特殊関数のいろいろな引数の値に対して，数値を求めなければならない．特殊関数の性質がくわしく調べられたのもそのような実際的要求とは無関係ではない．現

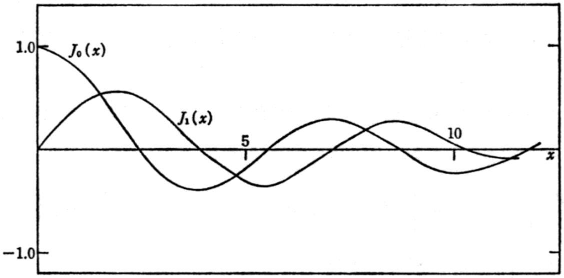


図 2.2　第一種ベッセル関数のグラフ

在では電子計算機が広く使用されているから，ぼう大な数表を用いることは稀であって，必要に応じて計算するという方法がとられているようである．それでは第一種ベッセル関数の値を，計算機で求めるにはどのような方法が考えられるだろうか．$J_\nu(x)$ の級数表現は

$$J_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

である．これを

$$J_\nu(x)=(x/2)^\nu\sum_{m=0}^{\infty}u_m,\quad u_m=(-1)^m(x/2)^{2m}/[m!\Gamma(\nu+m+1)]$$

と表わせば，無限級数 $u_0+u_1+\cdots$ をどのように求めるかが問題となる．u_{m+1} と u_m の比を考えれば

$$u_{m+1}=-u_m(x/2)^2/[(m+1)(m+\nu+1)]$$

この漸化関係を使って，$u_0=1/\Gamma(\nu+1)$ から逐次 $u_1, u_2, \cdots$ を求めてそれらを加えると級数の和が求められる．実際には最初の数項を求めれば，それらの和が良い近似値を与える．なぜなら x の値が大でない限り，u_{m+1}/u_m は m

とともに減少し，ある項よりあとは計算機のまるめ誤差より小となるからである．この方法は $0<x<8$ のときによい結果を与える．x がより大きいときには後で見られるように漸近級数が用いられる．

2.7 ハンケル関数

2.7.1 定義と漸化式　第一種，第二種ベッセル関数は z-平面上のすべての点（$\boldsymbol{R}(\nu)<0$ のときには $z=0$ を除く）で正則な関数である．しかしベッセル関数の解析的性質の考察や，ベッセル関数を含んだ定積分の計算の目的のためには，ハンケル関数を用いると便利なことが多い．それは $J_\nu(z)$ と $Y_\nu(z)$ を用いて

$$\left.\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= J_\nu(z)+iY_\nu(z) \\ H_\nu^{(2)}(z) &= J_\nu(z)-iY_\nu(z) \end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

て定義される．この定義式からただちに

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2}\{H_\nu^{(1)}(z)+H_\nu^{(2)}(z)\}$$

$$Y_\nu(z)=\frac{1}{2i}\{H_\nu^{(1)}(z)-H_\nu^{(2)}(z)\}$$

という関係が導かれる．$Y_\nu(z)$ は $J_\nu(z)$ と $J_{-\nu}(z)$ を用いて定義されたから，ハンケル関数を第一種ベッセル関数のみを使って表わすことできる：

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= J_\nu(z)+\frac{i[J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)]}{\sin\nu\pi} \\ &= \frac{i\sin\nu\pi\, J_\nu(z)-J_\nu(z)\cos\nu\pi+J_{-\nu}(z)}{i\sin\nu\pi} \\ &= \frac{J_{-\nu}(z)-e^{-i\nu\pi}J_\nu(z)}{i\sin\nu\pi} \end{aligned} \tag{2.31}$$

同じようにして

$$H_\nu^{(2)}(z)=\frac{e^{\nu\pi i}J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)}{i\sin\nu\pi} \tag{2.32}$$

という表現も得られる．

つぎにハンケル関数の漸化式を導くのに，$J_\nu(z)$ と $Y_\nu(z)$ の漸化式を定義式（2.30）にそのまま代入すると，下の結果が得られる；

$$\left.\begin{aligned} H_{\nu-1}{}^{(1)}(z)+H_{\nu+1}{}^{(1)}(z) &= \frac{2\nu}{z}H_\nu{}^{(1)}(z), \\ H_{\nu-1}{}^{(2)}(z)+H_{\nu+1}{}^{(2)}(z) &= \frac{2\nu}{z}H_\nu{}^{(2)}(z), \\ H_{\nu-1}{}^{(1)}(z)-H_{\nu+1}{}^{(1)}(z) &= 2H_\nu{}^{(1)\prime}(z), \\ H_{\nu-1}{}^{(2)}(z)-H_{\nu+1}{}^{(2)}(z) &= 2H_\nu{}^{(2)\prime}(z). \end{aligned}\right\} \quad (2.33)$$

2.8　変形ベッセル関数

2.8.1　変形ベッセル関数の定義　ベッセルの微分方程式 (2.5) で，z のかわりに iz とおいて得られる方程式

$$\frac{d^2f}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{df}{dz}-\left(1+\frac{\nu^2}{z^2}\right)f=0 \quad (2.34)$$

を変形ベッセル微分方程式とよび，その解を変形ベッセル関数という．もとの微分方程式の基本解は $J_\nu(z)$ と $Y_\nu(z)$ であるから，(2.34) の一つの解は

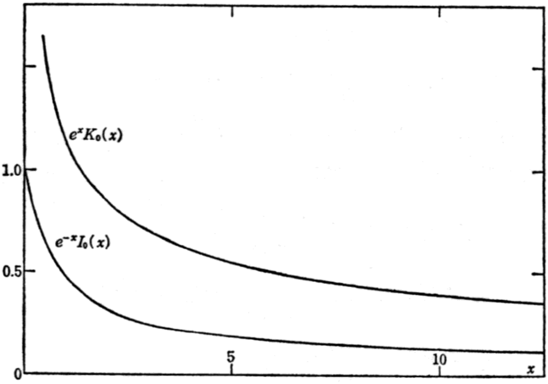


図 2.3　変形ベッセル関数のグラフ

$J_\nu(z)$ で z のかわりに iz とおくことによって得ることができる．$iz=ze^{\pi i/2}$ であるから，$J_\nu(iz)$ は

$$J_\nu(iz)=e^{\nu\pi i/2}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

となる．第一種変形ベッセル関数 $I_\nu(z)$ は因子 $e^{\nu\pi i/2}$ を除いて

$$I_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \tag{2.35}$$

によって定義するのが普通であるので，本書でもこの定義を採用する．第二の解としては

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)}{\sin\nu\pi} \tag{2.36}$$

をとることにする．このようにして定義された $K_\nu(z)$ を第二種変形ベッセル関数とよぶ．ν が整数でないとき，$I_\nu(z)$ と $K_\nu(z)$ は互いに独立であるから，これら二つの関数が変形ベッセル関数の基本解である．$\nu\to n$ (n: 整数) のとき，$I_\nu(z)$ の定義からわかるように $I_{-n}(z)=I_n(z)$ となって，(2.36) は不定形となる．このときには

$$Y_n(z)=\lim_{\nu\to n}Y_\nu(z)$$

として $Y_n(z)$ を定義したのと同じように，(2.36) の $\nu\to n$ の極限値として $K_n(z)$ を定義することにすれば，$K_n(z)$ の表現は $Y_n(z)$ を求めたのと同じようにして求めることができる；

$$K_0(z)=-\log\left(\frac{z}{2}\right)I_0(z)+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi(m+1)}{(m!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}, \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}K_n(z)=&\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^m(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n}\\&+(-1)^{n+1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!(n+m)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}\left\{\log\left(\frac{z}{2}\right)\right.\\&\left.-\frac{1}{2}\psi(m+1)-\frac{1}{2}\psi(n+m+1)\right\}.\end{aligned} \tag{2.38}$$

2.8.3 漸化式　変形ベッセル関数の漸化式を求めるには，まず $I_\nu(z)$ の定義式 (2.35) に注目する．それは

$$J_\nu(iz)=e^{\nu\pi i/2}I_\nu(z),\quad I_\nu(z)=e^{\nu\pi i/2}J_\nu(-iz) \tag{2.39}$$

と表すことができる．この関係を用いると $I_\nu(z)$ の漸化式の一つはつぎのように求めることができる；

$$\begin{aligned}I_{\nu-1}(z)+I_{\nu+1}(z)&=e^{-(\nu-1)\pi i/2}J_{\nu-1}(iz)+e^{-(\nu+1)\pi i/2}J_{\nu+1}(iz)\\&=i\,e^{-\nu\pi i/2}[J_{\nu-1}(iz)-J_{\nu+1}(iz)]\\&=2i\,e^{-\nu\pi i/2}\frac{d}{d(iz)}J_\nu(iz).\end{aligned}$$

したがって

$$I_{\nu-1}(z)+I_{\nu+1}(z) = 2\,I_\nu'(z)$$

が得られる．同様にして

$$I_{\nu-1}(z)-I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}\,I_\nu(z) \tag{2.40}$$

という漸化式も求めることができる．これらを第二種変形ベッセル関数に用いると

$$\left.\begin{aligned} K_{\nu-1}(z)-K_{\nu+1}(z) &= -\frac{2\nu}{z}\,K_\nu(z) \\ K_{\nu-1}(z)+K_{\nu+1}(z) &= -2\,K_\nu'(z) \end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

という関係が得られる．

2.8.3　変形ベッセル関数とハンケル関数の関係　　第二種変形ベッセル関数はハンケル関数を用いて表現することもできる．(*2.32*) で z のかわりに iz とおけば

$$H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{J_{-\nu}(iz)-e^{-i\nu\pi}\,J_\nu(iz)}{i\sin\nu\pi}$$

(*2.39*) を代入すると

$$= \frac{e^{-\nu\pi i/2}\,I_{-\nu}(z)-e^{-\nu\pi i/2}\,I_\nu(z)}{i\sin\nu\pi} = \frac{2}{\pi i}\,e^{-\nu\pi i/2}\,K_\nu(z)$$

ただし $K_\nu(z)$ を定義する (*2.36*) を用いた．したがって求める関係は

$$K_\nu(z) = (\pi i/2)\,e^{\nu\pi i/2}\,H_\nu^{(1)}(iz) \tag{2.42}$$

である．また $K_\nu(z) = K_{-\nu}(z)$ という関係が (*2.36*) からただちに得られるから，上の関係式は

$$K_\nu(z) = (\pi i/2)\,e^{\nu\pi i/2}\,H_{-\nu}^{(1)}(iz) \tag{2.43}$$

と書くこともできる．

2.8.4　変形ベッセル関数の積分表示　　第一種ベッセル関数のポアッソンによる積分表示 (*2.21*) からただちに変形ベッセル関数の積分表示を得ることができる．(*2.21*) を用いれば

$$I_\nu(z) = e^{-\nu\pi i/2}\,J_\nu(iz) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\!\left(\nu+\dfrac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\nu-1/2}\,e^{-z\xi}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\left\{\int_0^1 (1-\xi^2)^{\nu-1/2}\, e^{-z\xi}\, d\xi \right.$$

$$\left. + \int_1^0 (-d\xi)\, e^{z\xi}(1-\xi^2)^{\nu-1/2}\, d\xi\right\},$$

すなわち

$$I_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{z}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_0^1 (1-\xi^2)^{\nu-1/2} \cosh(z\xi)\, d\xi,$$

$$\nu+1/2>0 \quad (2.44)$$

が得られた.

2.9 ベッセル関数のロンスキアン

2.9.1 ベッセル関数　ベッセルの微分方程式は

$$\frac{d}{dz}\left(z\frac{df}{dz}\right)+\left(z-\frac{\nu^2}{z}\right)f = 0$$

とも表すことができる. u, v がこの方程式の二つの独立な解であれば, 2.5.2 項で行ったように

$$\frac{d}{dz}[zuv'-zvu'] = 0$$

という関係から, 積分してただちに

$$u(z)v'(z)-v(z)u'(z) = \frac{c}{z} \qquad (2.45)$$

が得られる. $u(z)$, $v(z)$ は独立な関数であるから, 積分定数 c は 0 ではあり得ない.

ν が整数でないときにはベッセル微分方程式の解 $J_\nu(z)$ と $J_{-\nu}(z)$ とは互いに独立であり, したがって u, v としてそれぞれ $J_\nu, J_{-\nu}$ を用いれば (2.45) がそのまま成り立つ. ここでは J_ν と $J_{-\nu}$ のロンスキアン ((2.45) の左辺) を求めてみよう. まず $J_\nu(z)$ の漸化式 (2.22) と (2.23) から

$$\left.\begin{aligned} J_\nu'(z) &= \frac{\nu}{z}J_\nu(z)-J_{\nu+1}(z) \\ J_{-\nu}'(z) &= \frac{\nu}{z}J_{-\nu}(z)+J_{-\nu-1}(z) \end{aligned}\right\} \qquad (2.46)$$

が導かれるから，この関係を用いるとロンスキアンは

$$J_\nu(z)J_{-\nu}'(z)-J_\nu'(z)J_{-\nu}(z)=J_\nu(z)J_{-\nu-1}(z)+J_{-\nu}(z)J_{\nu+1}(z)=\frac{c}{z}$$

となる．定数 c を定めるためにつぎのように考えよう．ベッセル関数の級数表示 (2.7) からわかるように，ロンスキアンは z^{-1} から始るべき級数であるが上の等式から，このべき級数は実は z^{-1} の項をもつのみである．z^{-1} の係数はしたがって

$$\text{係数}=\lim_{z\to 0} z\cdot[J_\nu(z)J_{-\nu-1}(z)+J_{-\nu}(z)J_{\nu+1}(z)]=c$$

で与えられることになる．$J_\nu(z)$ は

$$J_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\left\{\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}+\cdots\right\}$$

の形をしている，ただし … は z の高次のべき級数を表わす．したがって

$$J_\nu(z)J_{-\nu-1}(z)+J_{-\nu}(z)J_{\nu+1}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{-1}\left\{\frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)}\right\}+\cdots$$

一方，ガンマ関数の満たす関係 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi(\sin\pi z)^{-1}$ を代入すれば

$$c=-\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}$$

により c の値が得られる．こうして

$$J_\nu(z)J_{-\nu-1}(z)+J_{-\nu}(z)J_{\nu+1}(z)=-\frac{2\sin\nu\pi}{\pi z}$$

という結果が導かれる．ν のかわりに $-\nu$ とすれば，これはまた

$$J_{\nu-1}(z)J_{-\nu}(z)+J_\nu(z)J_{-\nu+1}(z)=\frac{2\sin\nu\pi}{\pi z} \tag{2.47}$$

と書くこともできる．ν が整数 n にひとしいとき，互いに1次独立な解として $J_n(z)$ と $Y_n(z)$ をとれば，この二つの関数のロンスキアンも同じように求めることができて，つぎの結果を得る；

$$Y_n(z)J_{n+1}(z)-J_n(z)Y_{n+1}(z)=\frac{2}{\pi z}. \tag{2.48}$$

2.9.2　変形ベッセル関数　　変形ベッセル関数 $I_\nu(z)$ と $K_\nu(z)$ のロンスキアンを考えることによってつぎの関係を導くことができることを付け加えておこう：

$$\left.\begin{aligned} I_\nu(z)K_\nu'(z)-I_\nu'(z)K_\nu(z) &= -\frac{1}{z} \\ I_\nu(z)K_{\nu+1}(z)+I_{\nu+1}(z)K_\nu(z) &= \frac{1}{z} \end{aligned}\right\} \tag{2.49}$$

2.9.3 引数の偏角が異なるベッセル関数の値　第一種ベッセル関数

$$J_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

を考える．ν の値が何であれ，総和記号のあとの級数（べき級数）は z の偶関数であるから，z のかわりに $ze^{m\pi i}$（m: 整数）とおいても値はかわらない．他方 z^ν については，その主値をとるものを約束しておけば

$$(ze^{m\pi i})^\nu = z^\nu e^{\nu m\pi i}$$

である．したがって

$$\left.\begin{aligned} J_\nu(ze^{m\pi i}) &= e^{\nu m\pi i} J_\nu(z) \\ J_{-\nu}(ze^{m\pi i}) &= e^{-\nu m\pi i} J_{-\nu}(z) \end{aligned}\right\} \tag{2.50}$$

という関係が成り立つ．第二種ベッセル関数 $Y_\nu(z)$ については

$$\begin{aligned} Y_\nu(ze^{m\pi i}) &= \frac{J_\nu(ze^{m\pi i})\cos\nu\pi - J_{-\nu}(ze^{m\pi i})}{\sin\nu\pi} \\ &= e^{-\nu m\pi i}\,\frac{\cos\nu\pi\, J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \\ &\quad -e^{-\nu m\pi i}\cos\nu\pi\,\frac{J_\nu(z)-J_\nu(z)e^{2\nu m\pi i}}{\sin\nu\pi} \end{aligned}$$

となって，この結果は

$$Y_\nu(ze^{m\pi i}) = e^{-\nu m\pi i}\, Y_\nu(z)+2i\cot\nu\pi\sin\nu m\pi\, J_\nu(z)$$

と表わすことができる．同じようにして

$$Y_{-\nu}(ze^{m\pi i}) = e^{-\nu m\pi i}\, Y_{-\nu}(z)+2i\,\mathrm{cosec}\,\nu\pi\sin\nu m\pi\, J_\nu(z) \tag{2.51}$$

という結果が得られる．変形ベッセル関数 $I_\nu(z)$ はその定義式 (2.35) からただちに

$$I_\nu(ze^{m\pi i}) = e^{\nu m\pi i}\, I_\nu(z) \tag{2.52}$$

を満足することがわかる．第二種変形ベッセル関数についても，その定義 (2.36) からつぎの関係が導かれる；

$$K_\nu(ze^{m\pi i}) - e^{-\nu m\pi i}\, K_\nu(z)-\pi i\,\mathrm{cosec}\,\nu\pi\sin\nu m\pi\, I_\nu(z) \tag{2.53}$$

2.10 ベッセル関数の複素積分による表示

2.10.1 基本的な考え方　　ベッセル関数の漸近級数を求めたり，応用上よく現われる積分をベッセル関数を用いて表現する目的のためには，ベッセル関数を複素平面上の積分として表わしておくと便利であることが多い．そのためにポアッソンの積分表示 (*2.21*) に類似の積分

$$w(z) = z^{\nu}\int_a^b e^{izt}\,T(t)\,dt \tag{2.54}$$

を考えて，この関数がベッセルの微分方程式の解となるためにはどのように関数 $T(t)$ と，積分の上限と下限 a, b をえらべばよいかを考える．a, b は必ずしも実数である必要はない．(*2.54*) を z について微分してただちに

$$\frac{dw}{dz} = \nu z^{\nu-1}\int_a^b e^{izt}T\,dt + z^{\nu}\int_a^b it\,e^{izt}T\,dt$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \nu(\nu-1)z^{\nu-2}\int_a^b e^{izt}T\,dt + 2\nu z^{\nu-1}\int_a^b it\,e^{izt}T\,dt - z^{\nu}\int_a^b e^{izt}\,t^2T\,dt$$

となるから，これをベッセルの微分演算子に代入して整理すれば

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w = z^{\nu}\int_a^b e^{izt}(1-t^2)T\,dt + z^{\nu-1}(2\nu+1)i\int_a^b te^{izt}T\,dt$$

となる．右辺の第一項を部分積分すれば

$$z^{\nu}\int_a^b e^{izt}(1-t^2)T\,dt = \frac{z^{\nu}}{iz}\Big[(1-t^2)T\,e^{izt}\Big]_a^b - \frac{z^{\nu}}{iz}\int_a^b e^{izt}\frac{d}{dt}\{(1-t^2)T\}\,dt$$

これを上の等式に代入すれば

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w = iz^{\nu-1}\int_a^b \left\{(2\nu+1)tT - \frac{d}{dt}[(t^2-1)T]\right\}e^{izt}\,dt - iz^{\nu-1}\Big[(1-t^2)T\,e^{izt}\Big]_a^b$$

という関係が得られる．したがってもし

$$\frac{d}{dt}\{(t^2-1)T\} = (2\nu+1)tT \tag{2.55}$$

$$\left[(1-t^2)T\,e^{izt}\right]_a^b=0 \qquad (2.56)$$

という二つの条件が満たされるように関数 $T(t)$ と，積分の上限，下限がえらばれれば，$w(z)$ はベッセル関数となっている．微分方程式 (2.55) は容易に積分できて

$$T(t)=(t^2-1)^{\nu-1/2}$$

を与える．したがって $a=1, b=-1$ とすれば(2.54) はポアッソンの積分表示となる．このように $T(t)$ が決定されたとして，上限，下限を定める方法について考えよう．$\left[e^{izt}(t^2-1)^{\nu+1/2}\right]_a^b$ が 0 となるためには二つの可能性がある．第一は積分路として閉曲線をとり，その閉曲線に沿って t の値が変化してもとの値にもどったとき，$e^{izt}(t^2-1)^{\nu+1/2}$ の値がもとにもどるようにそれを定めることである．第二の可能性は $t=b, t=a$ で，その関数が 0 となるように上限，下限をとることである．この二つの可能な積分路について順次議論することにする．

2.10.2 8 字形積分路 図 2.4 に示された積分路を考えて，$e^{izt}(t^2-1)^{\nu+1/2}$ の値がどのように変化するかを見てみよう．$(t-1)^{\nu+1/2}$ は t が $t>1$ である実数値のとき，実数値となる分枝をとるものと約束し

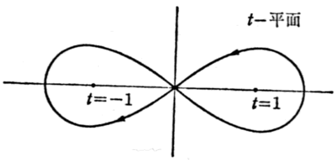


図 2.4 ベッセル関数の 8 字形積分路

$$t-1=re^{i\theta}, \quad (t-1)^{\nu+1/2}=Re^{i\Theta}$$

と極座標を使って表わすと

$$R=r^{\nu+1/2}, \quad \left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta=\Theta$$

である．$t=1$ を中心とした円形径路は $r=1, 0<\theta<2\pi$ で与えられるから，t の値が円形径路に沿って反時計回りに一周すれば $(t-1)^{\nu+1/2}$ の偏角は $2\pi(\nu+1/2)$ だけ増す．他方 $(t+1)^{\nu-1/2}=(2+re^{i\theta})^{\nu+1/2}$ は $r=1$ としたまま θ の値が 0 から 2π まで変化したとき，もとの値にもどる．したがって $(t^2-1)^{\nu+1/2}$ の値は偏角が $(\nu+1/2)2\pi$ だけ増加しその絶対値は変化しない．つぎに他の分岐点 $t=-1$ のまわりに時計まわりに t の値が変化してもと

の値にもどったとき，$(t^2-1)^{\nu+1/2}$ の値は絶対値はもとにもどり，偏角は $(\nu+1/2)2\pi$ だけ減少する．一方 e^{izt} は分岐点をもたないから，けっきょく8字形径路に沿って一周したとき $e^{izt}(t^2-1)^{\nu+1/2}$ の値はもとにもどる．この径路を $(1+,-1-)$ で示そう．その意味はいまや明かであろう．そうすれば

$$w(z)=z^\nu\int^{(1+,-1-)}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt \tag{2.57}$$

はベッセル微分方程式の一つの解である．この積分が $J_\nu(z)$ とどのような関係にあるかを調べるために，まず被積分関数が $t=\pm1$ を除いては t の正則な関数であることに注意する．したがって (2.57) の積分は図 2.5 に示す径路に沿って取ったものと同じである．無限級数

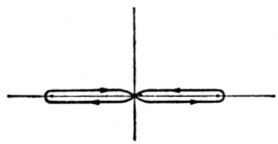


図 2.5　図 2.4 の積分路の変形

$$e^{izt}=\sum_{m=0}^\infty\frac{i^mz^mt^m}{m!}$$

はこの径路上で一様収束であるから，(2.57) の積分は e^{izt} を級数に展開し，項別に積分したものの和と同一の値をもつ．したがって等式

$$\int^{(1+,-1-)}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt=\sum_{m=0}^\infty\frac{i^mz^m}{m!}\int^{(1+,-1-)}t^m(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt$$

が成立する．積分は $t=0$ に関して対称な径路に沿ってとるから，奇数次の項は 0 となる．上の表式はしたがって

$$\sum_{m=0}^\infty\frac{2(-1)^mz^{2m}}{(2m)!}\int^{(1+)}t^{2m}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt$$

となり $t=u^2$ とおけば

$$=\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!}\int^{(1+)}u^{m-1/2}(u-1)^{\nu-1/2}\,du$$

ここに積分径路は図 2.6 に示されるものである．もし $R(\nu)>-1/2$ と仮定すれば $u=0$, $u=1$ の近傍からの積分への寄与は I, II を u-平面の実数軸に近づけると 0 になる．

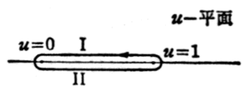


図 2.6

つぎに積分の値を求めるために

$$u-1=re^{i\theta}$$

とおけばⅠに沿っては $\theta=\pi$ であるから

$$\int_{\mathrm{I}} u^{m-1/2}(u-1)^{\nu-1/2}\,du = e^{i\pi(\nu+1/2)}\int_0^1 (1-r)^{m-1/2}\,r^{\nu-1/2}\,dr$$

Ⅱに沿っては $\theta=-\pi$ であるので

$$\int_{\mathrm{II}} u^{m-1/2}(u-1)^{\nu-1/2}\,du = e^{-i\pi(\nu+1/2)}\int_1^0 (1-r)^{m-1/2}\,r^{\nu-1/2}\,dr$$

これら二つを加えて，(*1.4*)，(*1.9*) に注意すれば

$$2i\cos\nu\pi\,\frac{\Gamma\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+\nu+1)}$$

となる．このようにして

$$z^{\nu}\int^{(1+,\,-1-)} e^{izt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt$$

$$=2i\cos\nu\pi\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{2m+\nu}}{(2m)!}\,\frac{\Gamma\left(m+\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+\nu+1)}$$

という関係が導かれる．ここでガンマ関数の倍法公式（*1.24*）を用いると

$$\frac{\Gamma\left(m+\dfrac{1}{2}\right)}{(2m)!}=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2m)}{\Gamma(m)(2m)!\,2^{2m-1}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m}m!} \qquad (2.58)$$

であるから，上の表式は

$$2i\cos\nu\pi\,\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)2^{\nu}J_{\nu}(z)$$

となる．こうしてベッセルの複素積分による表示

$$J_{\nu}(z)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\nu\right)}{2\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int^{(1+,\,-1-)} e^{izt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt,\quad R(\nu)+\frac{1}{2}>0, \qquad (2.59)$$

が得られた．

2.10.3　*U*字形積分路　　第二の可能性として積分（*2.54*）の上限と下限で $(t^2-1)^{\nu+1/2}e^{izt}$ が 0 となる場合を考えよう．図 2.7 のように積分路をとれば

$$\lim_{t\to i\infty}(t^2-1)^{\nu+1/2}e^{izt}=0 \quad R(z)>0$$

であるから，条件 $R(z)>0$ が満足されている限り，$w(z)$ はベッセル微分方程式の解である．$w(z)$ とベッセル関数との関係をみるために，まず

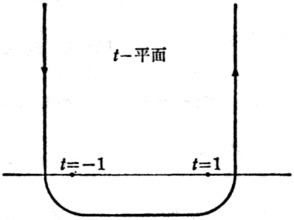


図 2.7　U 字形積分路

$$(t^2-1)^{\nu-1/2}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu+m\right)}{m!\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}t^{2\nu-1-2m}$$

という関係に注目しよう．そうすれば $w(z)$ は

$$w(z)=z^{\nu}\int_{i\infty}^{(-1+,1+)}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu+m\right)}{m!\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\int_{i\infty}^{(-1+,1+)}t^{2\nu-1-2m}\,dt$$

で与えられる．右辺の被積分関数は分岐点 $t=0$ を除いては正則であるから積分路を，$+i\infty$ から始り $t=0$ を時計方向に回り，$i\infty$ へと延びる径路でおきかえても積分の値は変わらない．$izt=-u$ とおけばこの積分は

$$\int_{i\infty}^{(0+)}t^{2\nu-1-2m}e^{izt}\,dt=z^{2m-2\nu}(-1)^{m+1}e^{-\nu\pi i}\int_{\infty}^{(0+)}(-u)^{2\nu-1-2m}e^{-u}\,du$$

となる．ここでまたガンマ関数のハンケルによる表示（*1.27*）を用いれば

$$\int_{\infty}^{(0+)}(-u)^{2\nu-1-2m}e^{-u}\,du=-\frac{2\pi i}{\Gamma(2m+1-2\nu)}$$

であるから

$$w(z)=z^{\nu}\int_{\infty i}^{(-1+,1+)}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt$$

$$=2\pi i\,e^{-\nu\pi i}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{2m-\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu+m\right)}{m!\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma(2m-2\nu+1)}$$

を得る．ふたたびガンマ関数の乗法公式から導かれる関係（*2.58*）で m の

かわりに $m-\nu$ とおけば

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu+m\right)}{\Gamma(2m-2\nu+1)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-2\nu}\Gamma(m-\nu+1)}$$

が得られるからこの等式を上の無限級数に代入すれば，けっきょく

$$w(z)=\frac{2\pi i\cdot\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}e^{-\nu\pi i}J_{-\nu}(z)$$

という結果が求められる．これを書き直して

$$J_{-\nu}(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)e^{\nu\pi i}}{2\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_{\infty i}^{(-1+,1+)}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt,$$

$$R(z)>0,\ R(\nu)+\frac{1}{2}>0 \qquad (2.60)$$

という $J_{-\nu}(z)$ の複素積分表示が得られた．

2.10.4 ハンケル関数　ハンケル関数 $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}$ は (2.31), (2.32) によって $J_\nu(z)$, $J_{-\nu}(z)$ を用いて表されるから，それらを積分 (2.59), (2.60) に類似の積分で表わすことができるはずである．まず (2.59) の積分路を図 2.8 のように変形する．$R(z)>0$ とすれば t-平面の実数軸に平行な部分からの積分への寄与は，それを無限上方へもって行けば 0 となるから，積分 (2.59) は $1+i\infty$ から出発し $t=1$ を反時計回りの方向に迂回し，ふたたび $1+i\infty$ へもどる径路と，$-1+i\infty$ から出発し $t=-1$ を時計方向に回り $-1+i\infty$ へもどる径路に沿ったものの二つからなることになる．積分 (2.60) の径路も図 2.8 のように変形すれば，同じような考察から，二つの径路に分けることができる．こうしてつぎの二つの積分表示が得られる：

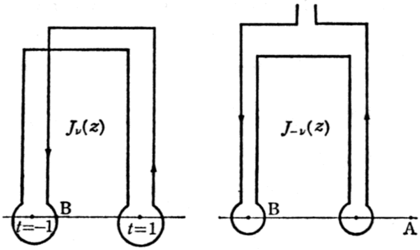


図 2.8 積分路の変形，A, B は実数軸上の点

$$J_\nu(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{2\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\left[\int_{1+i\infty}^{(1+)}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt\right.$$
$$\left.+\int_{-1+i\infty}^{(-1-)}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt\right] \tag{2.61}$$

$$J_{-\nu}(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)e^{\nu\pi i}}{2\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{1+i\infty}^{(1+)}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt$$
$$\left.-\int_{-1+i\infty}^{(-1-)}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt\right]$$

ところで 2.10.2 項の約束によれば $(t^2-1)^{\nu-1/2}$ の偏角は A では 0 である．$J_\nu(z)$ の積分路に沿って B に来たとき $\theta=\pi$ であるから，$(t^2-1)^{\nu-1/2}$ の偏角は $(\nu-1/2)\pi$ である．一方 $J_{-\nu}(z)$ の積分路に沿って B に来たときには $\theta=-\pi$ であるから，$(t^2-1)^{\nu-1/2}$ の偏角は $-(\nu-1/2)\pi$ である．この差は不便であるので，統一するために $(t^2-1)^{\nu-1/2}$ の偏角は B ではどちらの積分路をとっても $(\nu-1/2)\pi$ であると約束をしよう．そうすれば $J_{-\nu}(z)$ の積分表示は

$$J_{-\nu}(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{2\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\left[e^{\nu\pi i}\int_{1+\infty i}^{(1+)}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt\right.$$
$$\left.+e^{-\nu\pi i}\int_{-1+i\infty}^{(-1-)}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt\right] \tag{2.62}$$

となる．最後に，(*2.61*), (*2.62*) とハンケル関数の定義式 (*2.31*), (*2.32*) を比較すると

$$\left.\begin{aligned}H_\nu^{(1)}(z)&=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{1+\infty i}^{(1+)}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt,\\ H_\nu^{(2)}(z)&=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{-1+i\infty}^{(-1-)}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt\end{aligned}\right\} \tag{2.63}$$

という結果が得られる．この関係を導いた過程からわかるように，この積分表示は $R(z)>0,\ R(\nu)+1/2>0$ のときにのみ可能である．

2.11 エアリィとバセットの積分

2.11.1 エアリィの積分 物理学・工学への応用でよく現われる定積分

$$\int_0^\infty \cos(t^3+xt)\,dt, \qquad \int_0^\infty \frac{\cos xu}{(u^2+z^2)^{\nu+1/2}}\,du, \qquad x, z:\ \text{実数}$$

を考えよう．最初のものはエアリィ (Airy) の積分とよばれ，光学によく現れる重要な積分であり，第二の積分はバセット (Basset) の積分とよばれるものである．ここではこれらが変形ベッセル関数を使って表わすことができることを示そう．まずエアリィの積分

$$I=\int_0^\infty \cos(t^3+xt)\,dt$$

について考えると，あきらかに

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t^3+xt)}\,dt$$

である．そこで図 2.9 にあるような径路に沿っての積分を考えよう．$t=re^{i\theta}$ とおけば

$$\begin{aligned} t^3+xt &= r^3e^{3i\theta}+xre^{i\theta}\\ &= r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)\\ &\quad +xr(\cos\theta+i\sin\theta) \end{aligned}$$

であるから，$0<\theta<\pi/6$ であるかぎり，r^3 の係数の虚数部は正である．したがって被積分関数

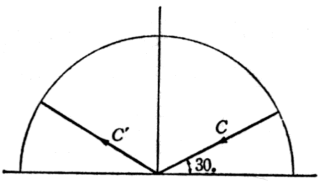


図 2.9 エアリィ関数の積分路

$$\exp[i(t^3+xt)]$$

を円弧 $r=R$, $0<\theta<\pi/6$ に沿って積分したものは $R\to\infty$ の極限で 0 となる．同じことが円弧 $r=R$, $5\pi/6<\theta<\pi$ についても成り立つ．被積分関数はこの積分路でつくられた閉曲線の内部では正則であるから，コーシーの定理によって

$$\lim_{R\to\infty}\left\{\int_{-R}^{R}+\int_{c,c'}\right\}e^{i(t^3+xt)}\,dt=0$$

したがって

$$I=-\frac{1}{2}\int_{c,c'} e^{i(t^3+xt)}\,dt$$

となる．いまこの積分を計算しよう．C上では

$$t^3+xt = ir^3+xre^{\pi i/6},\ \ dt = e^{\pi i/6}\,dr, \quad 0<r<\infty$$

一方，C' 上では

$$t^3+xt = ir^3+xre^{5\pi i/6},\ \ dt = e^{5\pi i/6}\,dr, \quad 0<r<\infty$$

であるから

$$I=\frac{1}{2}\int_0^\infty \exp(-r^3)\left[\exp\left(\frac{\pi i}{6}\right)\exp(xre^{2\pi i/3})\right.$$
$$\left.+\exp\left(-\frac{\pi i}{6}\right)\exp(xre^{-2\pi i/3})\right]dr$$

となる．ここで

$$\int_0^\infty \exp(-r^3)\exp(xre^{2\pi i/6})\,dr=\sum_{m=0}^\infty \frac{e^{2m\pi i/3}}{m!}\frac{x^m}{3}\Gamma\left(\frac{m}{3}+\frac{1}{3}\right)$$

に注意すれば

$$I=\frac{1}{3}\sum_{m=0}^\infty \frac{x^m}{m!}\Gamma\left(\frac{m}{3}+\frac{1}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}m\pi\right)$$

と変形される．$\cos(\pi/6+2m\pi/3)$ は m の値によって，$\cos(\pi/6)(m=3p,$ p: 整数)，$0(m=3p-1)$，$\cos(5\pi/6)(m=3p-2)$ という値をとるから

$$I=\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{6}\left\{\sum_{m=0}^\infty \frac{x^{3m}}{(3m)!}\Gamma\left(m+\frac{1}{3}\right)-\sum_{m=0}^\infty \frac{x^{3m+1}}{(3m+1)!}\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)\right\}$$

となる．ここでガウスの乗法公式 (*1.23*) で $n=3$, $z=m+1/3$ としたもの

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)\Gamma(m+1)=3^{1/2-3m-1}\,\Gamma(3m+1)\,2\pi$$

と，$n=3$, $z=m+2/3$ とおいたもの

$$\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)\Gamma(m+1)\Gamma\left(m+\frac{4}{3}\right)=3^{1/2-3m-2}\,\Gamma(3m+2)\,2\pi$$

を上の等式に代入して整理すれば

$$I=\frac{\pi}{3}\left\{\sum_{m=0}^\infty\left(\frac{x}{3}\right)^{3m}\frac{1}{m!\,\Gamma\left(m+\dfrac{2}{3}\right)}-\frac{x}{3}\sum_{m=0}^\infty\left(\frac{x}{3}\right)^{3m}\frac{1}{m!\,\Gamma\left(m+\dfrac{3}{4}\right)}\right\}$$

を得る．$y/2=(x/3)^{3/2}$ によって y を定義すれば，無限級数は

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^{3m}\frac{1}{m!\,\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)}=\left(\frac{y}{2}\right)^{1/3}I_{-1/3}(y),$$

$$\frac{x}{3}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^{3m}\frac{1}{m!\,\Gamma\left(m+\frac{4}{3}\right)}=\left(\frac{y}{2}\right)^{1/3}I_{1/3}(y)$$

となるから

$$I=\frac{\pi}{3}\left(\frac{y}{2}\right)^{1/3}\{I_{-1/3}(y)-I_{1/3}(y)\}$$

という結果が得られることになる．右辺は（*2.36*）を用いれば第二種変形ベッセル関数として表現できる．こうしてエアリィの積分は

$$\int_0^{\infty}\cos(t^3+xt)\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{3}K_{1/3}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right) \qquad (2.64)$$

という形に表わすことができる．

2.11.2 バセットの積分　バセットの積分も変形ベッセル関数を用いて表わすことができる．そのためにまずハンケル関数の積分表示（*2.63*）を変形することから考えよう．（*2.63*）が導かれた方法を想起すると，$R(z)>0$ という条件があるとき，図 2.8 に示された積分路で t-平面の実数軸に平行な部分からの積分への寄与は，それを無限に上方へもっていたとき 0 になるということを用いた．したがって $R(z)>0$ という条件が満たされないときには，積分の上限，下限で被積分関数 $e^{izt}(t^2-1)^{\nu-1/2}$ が 0 になるように，積分路を変形しなければならない．さて z のかわりに zxi（x: 正数）とすれ

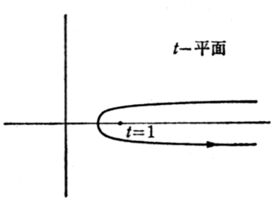


図 2.10

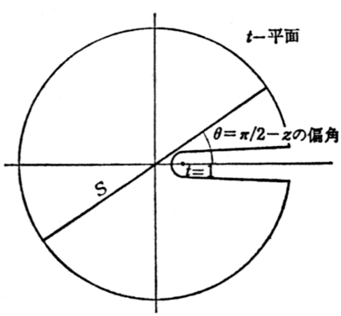


図 2.11　図 2.10 の変形

ば被積分関数は $e^{-xzt}(t^2-1)^{\nu-1/2}$ は $\mathbf{R}(z)>0$ であるとき，$t\to+\infty$ で0となる．したがって $H_\nu^{(1)}(ixz)$ に対する積分表示の径路は図 2.10 に示されたものとなる；

$$H_{-\nu}^{(1)}(ixz)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{ixz}{2}\right)^{-\nu}\int_{+\infty}^{(1+)}e^{-xzt}(t^2-1)^{-\nu-1/2}\,dt, \qquad (2.65)$$

ただし ν のかわりに $-\nu$ とおいた．ここで t を極座標

$$t=re^{i\theta}$$

で表わせば

$$zt=|z|r\exp\{i[\arg(z)+\theta]\}$$

となる．したがって不等式

$$-\pi/2<\arg(z)+\theta<\pi/2$$

が成り立てば，図 2.11 で示された円弧に沿っては被積分関数は $r\to\infty$ のとき指数関数的に0となって，この円弧に沿っての積分は0となる．被積分関数は分岐点 $t=\pm1$ を除いては正則であるから，コーシーの定理によって，(2.65) の積分は，径路 S に沿って積分したものと同じ値をもつことになる．S 上では zt は純虚数であるから

$$zt=iu, \quad t^2-1=-1-u^2/z^2$$

とおいてよい．そうすれば (2.65) の積分は

$$\int_{\infty}^{(1+)}e^{-xzt}(t^2-1)^{-\nu-1/2}\,dt=e^{-(\nu+1/2)\pi i}\int_{\infty}^{-\infty}e^{-ixu}(1+u^2/z^2)^{-\nu-1/2}\frac{i\,du}{z}$$

となるから，(2.65) はつぎの形をとる：

$$H_{-\nu}^{(1)}(ixz)=\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\pi\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}z^\nu e^{-(\nu+1/2)\pi i}\int_{\infty}^{+\infty}e^{-ixu}(u^2+z^2)^{-\nu-1/2}\,du$$

この関係を (2.43) に用いれば，バセットの積分が

$$\int_0^\infty\frac{\cos xu}{(u^2+z^2)^{\nu+1/2}}\,du=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2z}\right)^\nu K_\nu(xz) \qquad (2.66)$$

のように，変形ベッセル関数を用いて表現されたことになる．

2.12 ベッセル関数の漸近展開

2.12.1 漸近級数の定義 与えられた関数 $f(z)$ の $|z|$ が大きいときの挙動を調べる一つの方法に漸近級数がある．漸近級数の定義をするまえに，記号の説明をしておこう．

二つの関数 $f(z)$, $\phi(z)$ が与えられたとき

$$|f| < A|\phi|, \qquad |z| > \delta$$

であるような定数 A, δ が存在するとき

$$f = O(\phi)$$

と表す．また ε を任意に与えたとき

$$|f| < \varepsilon|\phi|, \qquad |z| > \delta$$

となる δ が存在するとき

$$|f| = o(\phi)$$

と表わす．これを平易な言葉で云えば，$|z|\to\infty$ のとき f/ϕ の絶対値がある定数より小であれば f は $O(\phi)$ の関数であり，f/ϕ が 0 に収束すれば f は $o(\phi)$ の関数である．

さて関数列 $\phi_0(z)$, $\phi_1(z)$, … が与えられたとき，すべての n に対して

$$f(z) - \sum_{m=0}^{n} a_m \phi_n(z) = o(\phi_n), \qquad |z|\to\infty \tag{2.67}$$

であれば，無限級数 $\sum_{m=0}^{\infty} a_m \phi_m(z)$ を関数 $f(z)$ の（与えられた関数列に関する）漸近級数とよび

$$f(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m \phi_m(z), \tag{2.68}$$

と表わす．右辺の級数は必ずしも収束するとは限らない．(2.67) を書き直せば

$$f(z) - \sum_{m=0}^{n-1} a_m \phi_m(z) = a_n \phi_n(z) + o(\phi_n), \qquad |z|\to\infty$$

である．したがって展開係数 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ は

$$a_n = \lim_{|z|\to\infty} \{f(z) - \sum_{m=0}^{n-1} a_m \phi_m(z)\}/\phi_n(z) \tag{2.69}$$

によって逐次求められる．

もっともよく使われる関数列は $\phi_m=\phi(z)z^{-m}$ の形をしている．このとき $f(z)/\phi(z)$ に対する漸近級数は

$$\frac{f(z)}{\phi(z)}\sim\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m}{z^m}$$

となる．このような漸近級数を漸近べき級数とよんでいる．一例として

$$f(z)=\frac{1}{z-1}$$

を考え，この関数の漸近べき級数を求めよう．(2.69) によって，$a_0, a_1, \cdots$ は逐次求められて

$$f(z)\sim\sum_{m=1}^{\infty}z^{-m}$$

となる．この漸近級数は $|z|>1$ で収束する．つぎに

$$g(z)=\frac{1}{z-1}+e^{-z}$$

を例にとれば，(2.69) の右辺はつぎのようになる；

$$\left[g(z)-\sum_{m=1}^{n-1}z^{-m}\right]z^{-n}=\left[(z-1)^{-1}-\sum_{m=1}^{n-1}z^{-m}\right]z^{-n}+e^{-z}z^{-n},$$

したがって $|z|\to\infty$ のとき，右辺の値は $f(z)$ に対するものと同じになる．このように $g(z)$ は $f(z)$ と同じ漸近級数をもつ．

2.12.2　リーマンの鞍点法　　ある関数が，適当な積分路に沿っての定積分

$$g(s)=\int e^{sf(z)}\phi(z)\,dz \qquad (2.70)$$

で与えられたとき，$|s|$ が大きいときの関数の漸近形を求めてみよう，ただし $f(z)$, $\phi(z)$ は z-平面のある領域で正則な関数であるとする．s は実数値と仮定してよい．s が複素数のとき，その偏角を $f(z)$ に掛けたものを新しく $f(z)$ と見なせば良いから．

さてリーマン (Riemann) の鞍点法はつぎのようなものである．(2.70) に現われる関数 $f(z)$ の微係数が 0 となる点

$$f'(z_0)=0$$

を通るように積分路を変形すれば，$s\to\infty$ のときこの点の近傍からの積分への寄与が積分 (2.70) の近似値を与える．このことを詳しく説明してみよう．

まず $f(z)$ の実数部と虚数部をそれぞれ u, v とする，

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad z = x + iy.$$

$f(z)$ は正則であるから，$u(x, y)$ はコーシー・リーマンの関係から，つぎのラプラス方程式を満足する；

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$z = z_0$ では $\partial u/\partial x = 0,\ \partial u/\partial y = 0$ であるから，$u(x, y)$ はそこで停留値をとる．しかし上の関係からそれは極大でも極小でもあり得ない．それは鞍点である．したがって積分路が鞍点を通り，$u(x, y)$ の尾根に垂直になるように変形すれば，鞍点の近傍からの積分が $s\to\infty$ のとき大きな寄与を占めることは明らかである．

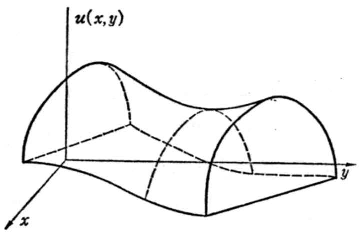


図 2.12 複素関数 $f(z)$ の実数部の鞍点

関数 $f(z)$ は正則であるから，べき級数に展開できて

$$f(z) = f(z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots$$

と表わせる．この級数の収束円を $|z - z_0| = R$ としよう．収束円上での $f(z)$ の最大値を M とすれば，コーシーの不等式

$$|a_n| \le MR^{-n}, \qquad |z - z_0| \le R,$$

が成り立つ．したがって

$$f(z) = f(z_0) + a_2(z - z_0)^2 + F(z)$$

とおけば

$$|F(z)| \le M\left\{\frac{|z - z_0|^3}{R^3} + \frac{|z - z_0|^4}{R^4} + \cdots\right\} = \frac{M|z - z_0|^3 R}{R^3\{R - |z - z_0|\}},$$

となる．$\varepsilon > 0$ として，$s^{-\varepsilon} \le R/2$ となるように s を大きくとっておく．そうすれば $F(z)$ は

$$|F(z)| \le 2MR^{-3} s^{-3\varepsilon}, \qquad |z - z_0| \le s^{-\varepsilon} \le R/2$$

で押えられる．したがって

$$e^{sf(z)} = \exp\{sf(z_0)+sa_2(z-z_0)^2\}\{1+O(s^{1-3\varepsilon})\}$$

が成り立つ．$\varepsilon > 1/3$ ととれば，最後の項は $s\to\infty$ のとき小さくなる．また

$$\phi(z) = \phi(z_0)+\Phi(z)$$

とおけば，コーシーの不等式から

$$|\Phi(z)| \leq 2M'R^{-1}s^{-\varepsilon}$$

という関係が得られる．それゆえ $1/3 < \varepsilon < 1/2$ ととれば

$$\phi(z) = \phi(z_0)+0(s^{-\varepsilon}) = \phi(z_0)+o(s^{1-3\varepsilon})$$

が成り立ち，$|z-z_0| < R$ からの積分への寄与は

$$\phi(z_0)e^{sf(z_0)}\int e^{sa_2(z-z_0)^2}\{1+O(s^{1-3\varepsilon})\}\,dz \tag{2.71}$$

で与えられる．この積分を計算するために

$$a_2 = Ae^{i\alpha},\quad A>0;\quad z-z_0 = re^{i\theta},\quad -s^{-\varepsilon}<r<s^{-\varepsilon}$$

とおく．そうすれば指数部分は

$$a_2(z-z_0)^2 = Ar^2\,e^{i(\alpha+2\theta)}$$

となり，$\alpha+2\theta = \pm\pi$ で与えられる θ が，求める積分路の方向を与える．この方向に沿って積分すれば第一項は

$$\phi(z_0)e^{sf(z_0)+i(\pi-\alpha)/2}\int e^{-Asr^2}\,dr$$

となる．いま

$$t^2 = Asr^2,\quad T = (As^{1-2\varepsilon})^{1/2} = 0(s^{1/2-\varepsilon})$$

とおけば，この積分は

$$\int e^{-Asr^2}\,dr = (As)^{-1/2}\int_{-T}^{T}e^{-t^2}\,dt = (As)^{-1/2}\left\{\sqrt{\pi}-2\int_T^\infty e^{-t^2}\,dt\right\}$$

となる．第二項の大きのオーダーを求めよう．部分積分によって

$$\int_T^\infty e^{-t^2}\,dt = \left[\frac{e^{-t^2}}{2t}\right]_T^\infty - \int_T^\infty \frac{e^{-t^2}}{2t^2}\,dt,\qquad e^{-t^2}\leq\frac{1}{1+t^2}$$

が得られるから，これのオーダーは $O(s^{3\varepsilon-3/2})$ である．また (2.71) の第二項は $O(s^{1/2-3\varepsilon})$ であるから，(2.71) は

$$\phi(z_0)e^{sf(z_0)+i(\pi-\alpha)/2}(\pi/As)^{1/2}\{1+O(s^{3\varepsilon-3/2})+O(s^{1-3\varepsilon})\}$$

となる．したがって $z=z_0$ の近傍からの積分 (2.70) への寄与は $s\to\infty$ のとき

$$\phi(z_0)\, e^{sf(z_0)} \left[\frac{-2\pi}{sf''(z_0)} \right]^{1/2} \tag{2.72}$$

に漸近的に近づく．これが積分（*2.70*）の漸近形を与えるリーマンの方法である．これをより精密にしたデバイ（Debye）の最大傾斜法もあることをつけ加えておこう．

この方法でガンマ関数の漸近形を求めることができる．$|\arg(z)| < \pi$ と仮定し（*1.15*）で t のかわりに tz とおけば

$$\Gamma(z) = z^z \int e^{z(\log t - t)} t^{-1}\, dt,$$

ただし積分の範囲は $t=0$ から $\infty \exp\{-i \arg(z)\}$ までである．被積分関数の指数部分は $t=1$ で鞍点をもち，その近傍からの積分への寄与を（*2.72*）によって計算すれば，$\Gamma(z)$ の漸近形は

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-1/2}\, e^{-z}, \quad |z| \to \infty, \quad |\arg(z)| < \pi \tag{2.73}$$

となる．これはスターリング（Stirling）の公式とよばれている．

2.12.3 ハンケル関数の漸近展開　ベッセル関数はハンケル関数を用いて表わされるから，ハンケル関数の漸近展開を求めておけば十分である．そのために準備としてつぎのダルブー（Darboux）の定理を証明しておこう．

定理　$f(z)$ は a と $a+h$ を結ぶ直線上で微分可能な関数であるとする．そうすれば等式

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(a) + \frac{h^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(a+th)(1-t)^{n-1}\, dt \tag{2.74}$$

が成り立つ．

［証明］　直接微分によって次の関係を確めることができる：

$$\frac{d}{dt} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{h^m}{m!} (1-t)^m f^{(m)}(a+th) = \sum_{m=1}^{n-1} \left\{ \frac{-h^m}{(m-1)!} (1-t)^{m-1} f^{(m)}(a+th) + \frac{h^{m+1}}{m!} (1-t)^m f^{(m+1)}(a+th) \right\}$$

右辺の第一の総和で $m-1=p$ とおけば，右辺は

$$-\sum_{p=0}^{n-2}\frac{h^{p+1}}{p!}(1-t)^p f^{(p+1)}(a+th)+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^{m+1}}{m!}(1-t)^m f^{(m+1)}(a+th)$$

$$=\frac{h^m}{(n-1)!}(1-t)^{n-1}f^{(n)}(a+th)-hf^{(1)}(a+th)$$

となる．

両辺を t について 0 から 1 まで積分すれば，ダルブーの公式 (*2.74*) が得られる．

さてハンケル関数の積分表示 (*2.63*) で積分変数の変換

$$t-1=iuz^{-1}$$

を行えば，あきらかに

$$t^2-1=\left(1+\frac{iu}{z}+1\right)\left(1+\frac{iu}{z}-1\right)=\frac{iu}{z}\left(2+\frac{iu}{z}\right),\quad dt=\frac{i}{z}du$$

であるから

$$H_\nu^{(1)}(z)=\frac{\Gamma(1/2-\nu)}{\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int e^{iz(1+iu/z)}\left(\frac{iu}{z}\right)^{\nu-1/2}\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{\nu-1/2}2^{\nu-1/2}\frac{i}{z}du$$

$$=\frac{i\Gamma(1/2-\nu)}{\pi\sqrt{2\pi z}}e^{i(z-\pi/4-\nu\pi/2)}\int e^{-u}(-u)^{\nu-1/2}\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{\nu-1/2}du \tag{2.75}$$

となる．積分路は $u=+\infty$ から出発して $u=0$ を正の向きに迂回し，$u=+\infty$ にもどるものである．さてダルブーの定理で $f(z)=(1+z)^{\nu-1/2}$，$a=0$, $h=iu/2z$ ととり

$$f^{(m)}(a)=\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\nu-m+\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu-m+1/2)}$$

という関係に注意すれば，ただちに

$$\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{\nu-1/2}=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{m!\,\Gamma(\nu-m+1/2)}\left(\frac{iu}{2z}\right)^m$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{iu}{2z}\right)^n\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu-n+1/2)}\int_0^1(1-t)^{n-1}$$
$$\times\left(1+\frac{iut}{2z}\right)^{\nu-n-1/2}dt$$

が得られる．ところが (*1.26*) を使えば

$$\int e^{-u}(-u)^{\nu-1/2}u^m\,du=-2i(-1)^m\,\Gamma\left(\nu+m+\frac{1}{2}\right)\sin\pi\left(\nu+m+\frac{1}{2}\right)$$

となるから，(2.75) はつぎのようになる：

$$H_\nu^{(1)}(z)=\frac{2\Gamma(1/2-\nu)\Gamma(\nu+1/2)}{\pi\sqrt{2\pi z}}e^{i(z-\pi/4-\nu\pi/2)}$$

$$\times\left\{\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\Gamma(\nu+m+1/2)}{m!\,\Gamma(\nu-m+1/2)}\sin\pi\left(\nu+m+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-i}{2z}\right)^m+R_n\right\}$$

ただし剰余 R_n は

$$(n-1)!\,\Gamma\left(\nu-n+\frac{1}{2}\right)R_n$$

$$=\left(\frac{i}{2z}\right)^n\int e^{-u}(-u)^{\nu-1/2}\;u^n\int_0^1(1-t)^{n-1}\left(1+\frac{iut}{2z}\right)^{\nu-n-1/2}dt\cdot du$$

で与えられる．また $\Gamma(1/2-\nu)\Gamma(\nu+1/2)=\pi/\sin(\nu+1/2)\pi$ を上の等式に代入すれば

$$H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i(z-\pi/4-\nu\pi/2)}\left\{\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\Gamma(\nu+m+1/2)}{m!\,\Gamma(\nu-m+1/2)}\left(\frac{i}{2z}\right)^m+R_n\right\}\tag{2.76}$$

という結果が得られる．同じようにして

$$H_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i(z-\pi/4-\nu\pi/2)}\left\{\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\Gamma(\nu+m+1/2)}{m!\,\Gamma(\nu-m+1/2)}\left(\frac{-i}{2z}\right)^m+R_n'\right\}\tag{2.77}$$

という結果も得られる．

これらの結果を使えば $J_\nu(z)$ と $Y_\nu(z)$ はつぎのように表現できる；

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\left(z-\frac{\pi}{4}-\frac{\nu\pi}{2}\right)\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k\Gamma(\nu+2k+1/2)}{(2k)!\,\Gamma(\nu-2k+1/2)}\left(\frac{1}{2z}\right)^{2k}\right.$$
$$\left.-\sin\left(z-\frac{\pi}{4}-\frac{\nu\pi}{2}\right)\sum_{k=0}^{[n/2-1/2]}\frac{(-1)^k\Gamma(\nu+2k+3/2)}{(2k+1)!\,\Gamma(\nu-2k-1/2)}\left(\frac{1}{2z}\right)^{2k+1}+R_n''\right\}\tag{2.78}$$

$$Y_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\sin\left(z-\frac{\pi}{4}-\frac{\nu\pi}{2}\right)\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k\Gamma(\nu+2k+1/2)}{(2k)!\,\Gamma(\nu-2k+1/2)}\left(\frac{1}{2z}\right)^{2k}\right.$$
$$+\cos\left(z-\frac{\pi}{4}-\frac{\nu\pi}{2}\right)\sum_{k=0}^{[n/2-1/2]}\frac{(-1)^k\Gamma(\nu+2k+3/2)}{(2k+1)!\,\Gamma(\nu-2k-1/2)}\left(\frac{1}{2z}\right)^{2k+1}$$
$$\left.+R_n'\right\}\tag{2.79}$$

ただし $[n/2]$ は $n/2$ を越えない最大の整数を表わしている．

(2.76)～(2.79) の剰余 R_n に対して

$$\lim_{|z|\to\infty} R_n z^n = \text{有限確定}$$

であるから，$n\to\infty$ としたとき，(2.76)～(2.79) の級数は左辺の関数の漸近級数である．(2.75) は $\mathbf{R}(z)>0$, $\mathbf{R}(\nu)+1/2>0$ の仮定のもとで得られたが，左辺の $H_\nu^{(1)}(z)$ は z, ν の値に関係なく定義されている．他方右辺に現われる因子 $(1+iu/2z)^{\nu-1/2}$ は $-\pi/2<\arg(z)<3\pi/2$ である限り $0<u<+\infty$ において分岐点をもたない．それゆえこの z の範囲で (2.75) の右辺は z の正則関数であり解析接続により (2.75) は $\mathbf{R}(\nu)+1/2>0$, $-\pi/2<\arg(z)<3\pi/2$ で成り立つ．また積分路を適当にとり直して (2.75) が $-\pi<\arg(z)<2\pi$ で成り立つようにすることもできる．したがって (2.75) から導かれる展開 (2.76) は $-\pi<\arg(z)<2\pi$ で成り立つ．同様の考察によって (2.77) は $-2\pi<\arg(z)<\pi$ で成り立つから，それらから得られる展開 (2.78), (2.79) は $-\pi<\arg(z)<\pi$ で成り立つ．

2.13　ベッセル関数の零点

2.13.1　次数を与えたときの $J_\nu(z)$ の零点　　ベッセル関数は次数 ν と引数 z の関数であるから，ν を固定し z を変えたとき 0 になる場合と，z を固定し ν を変えたときに 0 となる場合とある．ここでは ν に実数値を与えたときの $J_\nu(z)$ の零点の分布を考える．まず $J_\nu(z)=0$ の根はすべて実数であることを示そう．

まず任意の α, β に対して

$$(\beta^2-\alpha^2)\int_0^b xJ_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)\,dx$$
$$=\left[x\frac{dJ_\nu(\alpha x)}{dx}J_\nu(\beta x)-x\frac{dJ_\nu(\beta x)}{dx}J_\nu(\alpha x)\right]_{x=0}^{x=b}$$

が成り立つことを示すことができる (6.2.3 項参照)．$\nu>-1/2$ であれば，右辺の $x=0$ からの寄与は 0 となる．いまかりに α を複素数として

$$J_\nu(\alpha b)=0$$

が成り立つとして，β を α の複素共役にとれば，$J_\nu(x)$ は係数が実数であ

るべき級数であるから $J_\nu(\beta b)=0$ も成り立つ．上の等式の右辺はしたがって 0 である．他方左辺は

$$(\beta^2-\alpha^2)\int_0^b |J_\nu(\alpha x)|^2 x\,dx$$

となり，$\beta^2-\alpha^2$ は 0 ではないから，これは決して 0 とはならない．したがって α は複素数ではあり得ない．こうして $\nu>-1/2$ のとき $J_\nu(z)$ の零点はすべて実数軸上にあることが示された．

つぎに $J_\nu(x)$ は $[0,\infty)$ で無限回 0 となることを示そう．(*2.25*), (*2.26*) によってベッセルの微分方程式を標準形に変形すれば，それは

$$U(x)\equiv\frac{J_\nu(x)}{\sqrt{x}},\qquad D(x)\equiv 1+\frac{1/4-\nu^2}{x^2}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2}+D(x)\,U=0$$

となる．x は十分大でしたがって $D(x)$ は定符号と見なし得るとする．ある x の値 x_0 で $U>0$ と仮定してよい．$x=x_0$ で dU/dx の値が正負いずれの値であっても

$$d^2U/dx^2<0,\qquad U>0$$

であるから，$U>0$ である限り，dU/dx は x の増加とともに減少する．これは U が負になるまで続くから，$U(x)$ は $x>x_0$ で必ず一つの零点をもつ．この議論は x_0 の値に無関係（$D(x)$ が定符号である限り）に成り立つから，$U(x)$ は無限回 0 となり，同じことが $J_\nu(x)$ についても云える．したがって 2.5.2 項で示したように $Y_\nu(z)$ も無限個の零点を実数軸上にもつ．

$Y_0(z)$ の実数軸上以外の零点については $J_\nu(z)$ の場合と類似の方法で調べることができる．ベッセルの微分方程式と，$Y_0(z)$ の $z=0$ の近傍での関数形を使えば

$$(\beta^2-\alpha^2)\int_0^b xY_0(\alpha x)Y_0(\beta x)dx=\left[xY_0(\beta x)\frac{dY_0(\alpha x)}{dx}\right.$$
$$\left.-xY_0(\alpha x)\frac{dY_0(\beta x)}{dx}\right]_{x=b}-\frac{4}{\pi^2}\log\frac{\beta}{\alpha}$$

という関係式が求められる．さて $Y_0(z)$ が複素数の零点 βb をもてば，αb

をそれの複素共軛とすればそれもまた零点である．そこで

$$\beta = Ae^{i\theta}, \quad \alpha = Ae^{-i\theta}, \quad A,\ \theta > 0$$

とおけば，上の等式は

$$\int_0^b xY_0{}^2(\alpha x)dx = -\frac{4\theta}{A^2\pi^2 \sin 2\theta}$$

となる．左辺は正であるが，右辺は $0 < \theta < \pi/2$ のとき負である．したがって $Y_0(z)$ は $R(z) > 0$ では実数軸上以外には零点をもち得ない．

2.13.2　第二種変形ベッセル関数の零点　第二種変形ベッセル関数 $K_\nu(z)$ は

$$K_\nu(z) = (\pi i/2)e^{\nu\pi i/2} H_\nu{}^{(1)}(iz)$$

によってハンケル関数と関係づけられている．それゆえハンケル関数の零点の所在を調べるには $K_\nu(z)$ のそれを知れば十分である．

$K_\nu(z)$ の零点が虚数軸上にないことは (2.30) を使えばただちにわかる．

まず (2.30) と上の関係から

$$K_\nu(xe^{-\pi i/2}) = \frac{\pi i}{2} e^{\nu\pi i/2}\{J_\nu(x) + iY_\nu(x)\}, \quad x > 0 \qquad (2.80)$$

が導れるが，$J_\nu(x)$ と $Y_\nu(x)$ は同時に 0 にならないから，$K_\nu(xe^{-\pi i/2})$ は $x > 0$ で零点をもたない．同じようにして $K_\nu(xe^{\pi i/2})$ も $x > 0$ で 0 とはならないことがわかる．最後に $R(z) > 0$ で $K_\nu(z)$ は零点をもたないことを示そう．そのためにはつぎの定理を必要とする；

定理　閉曲線 C 上とその内部で正則な関数 $f(z)$ の C 内の零点の数 N は，C に沿って一周したときの $f(z)$ の偏角の変化を 2π で割ったものである．ただし n 重根は n 個の零点と見なす．

[証明]　C 内にある零点を $a_1, a_2, \cdots, a_N$ とする．$f(z)$ を

$$f(z) = (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_N)g(z)$$

と表わせば，$g(z)$ は正則関数で，C 内には零点をもたない．これの対数微分をとったもの

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a_1} + \frac{1}{z-a_2} + \cdots + \frac{1}{z-a_N} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

を C 上で積分すれば

$$\int_C \frac{d}{dz}\cdot\{\log f(z)\}\,dz = [\log f(z)]_C = 2\pi i N$$

を得る，ここに [ ]$_C$ は [ ] 内にある量の C に沿っての変化を表わす．ところが $\log f(z) = \log|f(z)| + i\,\mathbf{arg}(f)$ であるから，定理は証明された．

いま C として図 2.13 に示された閉曲線を考え

$$f(z) = z^\nu K_\nu(z)$$

ととれば，$f(z)$ の零点と $K_\nu(z)$ のそれは一致する．正の実数軸上で $K_\nu(z)$ は実数値をとるから，そこでの偏角は 0 である．(*2.76*) から

$$K_\nu(-iy) = \frac{\pi i}{2} e^{\nu\pi i/2} H_\nu^{(1)}(y) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2y}} e^{i(y-\pi/4-\nu\pi/2)} \qquad y \gg 1$$

であり，また $|z| \ll 1$ のとき

$$f(z) = \Gamma(\nu) 2^{-\nu-1}\{1+0(z^2)\}$$

であるから，II に沿っての偏角の増加は $(R-\pi/4-\nu\pi)$ である．また α に沿っての偏角の変化は 0，Γ に沿って偏角は $(R-\pi/4-\nu\pi)$ だけ減少する．したがって C に沿って一周したときの $z^\nu K_\nu(z)$ の偏角の変化は 0 であり，前定理によって C 内に零点はない．同じようにして第一象限にも $K_\nu(z)$ は零点を持たないことが示される．以上をまとめると，$K_\nu(z)$ は $R(z) \geq 0$ に零点を持たない．

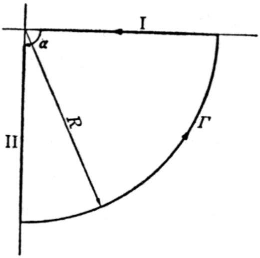


図 2.13 $K_\nu(z)$の零点の所在を求めるための閉曲線

演 習 問 題

1. 鞍点法を用いてエアリィとバセットの積分の漸近形を求めよ．
2. エアリィ積分が満足する2階の微分方程式を導け．
3. 超越方程式

$$J_n(\lambda) = 0$$

の根を $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots$ とするとき，無限級数の和

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{-2}$$

を求めよ．

［ヒント：ベッセル関数 $J_n(z)$ を無限乗積として表わしたものと，級数表示とを比較せよ］

4.　関数 $u=e^{ikz}$ はヘルムホルツの方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2 u=0$$

の一つの解であることを示せ．またヘルムホルツ方程式の解 u を球座標 (r, θ, φ) を用いて

$$u=\sum_n \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{kr}} f_n(\theta)$$

と表わしたとき，$f_n(\theta)$ はルジャンドルの微分方程式を満足することを示せ．この結果を用いて展開公式

$$e^{ikr\cos\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)i^n P_n(\cos\theta)\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\,J_{n+1/2}(kr)$$

を導け．

5.　ホイッテカーの積分表示

$$J_{n+1/2}(z)=(-i)^n\sqrt{\frac{\pi}{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{izt} P_n(t)\,dt$$

を証明せよ．ただし $P_n(t)$ は n 次のルジャンドル多項式である．

6.　積分方程式

$$f(x)=\int_0^\infty J_\nu(xt)(xt)^{1/2} f(t)\,dt, \qquad R(\nu)+1>0$$

は解

$$f(x)=x^{\nu+1/2}e^{-x^2/2}$$

をもつことを示せ．

7.　ベッセルの微分方程式 (2.5) で

$$z=\frac{2}{3}w^{3/2}, \qquad f=\frac{F}{\sqrt{w}}$$

とおけば，それは

$$F''+wF=0$$

となることを示せ，ここに ′ は w に関する微分である．

8.　上と類似の変換により，エアリィ積分 (2.64) の満たす微分方程式を求めよ．

3章 ルジャンドル関数

3.1 ルジャンドルの多項式

3.1.1 定　義　3次元ユークリッド空間の点 P の直角座標を (x, y, z) で表わし，もう一つの固定した点 Q の座標を (x_0, y_0, z_0) としよう．このとき

$$V(x, y, z) = \overline{PQ}^{-1} = \{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0{}^2)\}^{-1/2} \tag{3.1}$$

で定義される関数を考えて，この関数の満足する一つの偏微分方程式を導こう．まず $(x, y, z) \neq (x_0, y_0, z_0)$ であるとして

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{x-x_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}$$

が容易に得られ，$\partial V/\partial y$, $\partial V/\partial z$ は分子を $(y-y_0)$, $(z-z_0)$ で置きかえると求められる．もう一度微分すれば

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{1}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}} + \frac{3(x-x_0)^2}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{5/2}}$$

となり，$\partial^2 V/\partial y^2$, $\partial^2 V/\partial z^2$ は $(x-x_0)^2$ を $(y-y_0)^2$, $(z-z_0)^2$ で置きかえたものである．これらを加えれば

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{3.2}$$

という偏微分方程式が得られる．これはラプラス（Laplace）の方程式とよばれ，数理物理学の重要な方程式である．ここで球座標 (r, θ, φ) を

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

によって定義しよう．r は動径，θ は余緯度，φ は方位角とよばれている．

さて，点 Q は z 軸上にあるとしよう．Q の位置を指定するには，動径座標 r_0 のみが必要である．そうすれば

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = x^2+y^2+(z-r_0)^2$$
$$= r^2-2rr_0\cos\theta+r_0^2$$

であるから，(3.1) で定義される関数 V は球座標を用いて

$$V = [r^2-2rr_0\cos\theta+r_0^2]^{-1/2}$$
$$= r_0^{-1}\left[1-2\frac{r}{r_0}\cos\theta+\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{-1/2} \qquad (3.4)$$

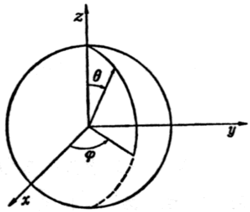


図 3.1　球座標の定義

で与えられることになる．いま $r_0>r$ と仮定して φ を (r/r_0) のべき級数に展開しよう：

$$r_0^{-1}\left[1-2\frac{r}{r_0}\cos\theta+\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{-1/2} = \frac{1}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \qquad r<r_0 \qquad (3.5)$$

べき級数の係数 $P_n(\cos\theta)$ を n 次のルジャンドル (Legendre) 多項式と定義する．係数が実際に $\cos\theta$ の多項式となることはあとでわかるであろう．

3.1.2　ルジャンドル多項式の漸化式　　ルジャンドル多項式の性質を導くために，$\zeta=\cos\theta$, $r/r_0=\alpha$ とおいて (3.5) を

$$[1-2\alpha\zeta+\alpha^2]^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(\zeta) \qquad \alpha<1 \qquad (3.6)$$

という形に直しておこう．まず $\zeta=1$ とおけば左辺は

$$(1-2\alpha+\alpha^2)^{-1/2} = (1-\alpha)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n$$

となるので，右辺と比較してただちに

$$P_n(1)=1 \qquad n=0,1,2,\cdots$$

という結果を得ることになる．また $\zeta=-1$ とおくことによって

$$P_n(-1)=(-1)^n$$

が得られる．また $\alpha=0$ とおけば

$$P_0(\zeta)=1$$

が得られる．つぎに (3.6) の両辺の対数をとり，α について微分すれば

$$\frac{\alpha-\zeta}{1-2\alpha\zeta+\alpha^2}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1} P_n(\zeta)}{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\zeta)}$$

あるいは

$$(\zeta-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(\zeta) = (1-2\alpha\zeta+\alpha^2)\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1} P_n(\zeta)$$

となる．両辺の α^n のべき係数を比較すれば

$$\zeta P_n(\zeta)-P_{n-1}(\zeta) = (n-1)P_{n-1}(\zeta)-2\zeta n\, P_n(\zeta)+(n+1)P_{n+1}(\zeta)$$

が得られ，これを整理すれば

$$(n+1)P_{n+1}(\zeta)+nP_{n-1}(\zeta) = (2n+1)\zeta P_n(\zeta) \tag{3.7}$$

となる．これがルジャンドル多項式の漸化式である．$n=0,1,2$ とおけば

$$P_1(\zeta)=\zeta, \qquad P_2(\zeta)=(3\zeta^2-1)/2$$

のようにして，$P_1, P_2, P_3, \cdots$ が求められる．こうして求められる $P_n(\zeta)$ が ζ の n 次多項式であることは漸化式 (*3.7*) から明らかである．

つぎに (*3.6*) の ζ について対数微分をとろう．このときも上と同じようにすれば漸化式

$$\frac{d}{d\zeta}[P_{n+1}(\zeta)-P_{n-1}(\zeta)] = (2n+1)P_n(\zeta) \tag{3.8}$$

が導かれる．

3.1.3 ルジャンドル多項式の陽な表現　ルジャンドル多項式の定義式(*3.6*)から $P_n(\cos\theta)$ の陽な表現を求めることができる．そのためにまず

$$(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2) = (1-\alpha e^{i\theta})(1-\alpha e^{-i\theta})$$

という関係に注意しよう．$|z|<1$ であれば

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}{r!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}z^r$$

という展開ができるから，(*3.6*) により

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(\cos\theta) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{r!\,s!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\alpha^{r+s}e^{i(r-s)\theta}$$

という関係が求められる．両辺の α^n の係数を比較すれば

$$P_n(\cos\theta)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-r+\frac{1}{2}\right)}{\pi r!(n-r)!}e^{i(2r-n)\theta}$$

という関係が導かれる．ガンマ関係の倍法公式（*1.24*）で，$z=n-r+1/2$ とおけば

$$\Gamma\left(n-r+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-2r)!\sqrt{\pi}\ 2^{-(2n-2r)}}{(n-r)!}$$

となり，$z=r+1/2$ とおけば

$$\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2r)!\sqrt{\pi}\ 2^{-2r}}{r!}$$

となるから，$e^{i(2r-n)\theta}$ の係数は

$$\frac{\Gamma\left(n-r+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}{\pi r!(n-r)!}=\frac{(2r)!(2n-2r)!}{2^{2n}(r!)^2((n-r)!)^2}$$

となる．したがってルジャンドル多項式の陽な表現

$$P_n(\cos\theta)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2r)!(2n-2r)!}{2^{2n}(r!)^2((n-r)!)^2}e^{i(2r-n)\theta} \tag{3.9}$$

が求められた．この公式から $P_n(\cos\theta)$ を θ の三角関数として表わすために，まず総和記号の中で $r=0$ とおいた係数と $r=n$ とおいた係数とは等しいことに注目する．そうすれば第0項と第 n 項との和は

$$\frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\cos n\theta$$

である．第 s 項と第（$n-s$）項との和も一つの組にまとめると

$$\frac{(2s)!(2n-2s)!}{2^{2n-1}((n-s)!)^2(s!)^2}\cos[(n-2s)\theta]$$

となり，これを s について加えると $P_n(\cos\theta)$ が得られる．n が奇数 $2k+1$ であれば，すべての項は対にまとめられるが，偶数 $2k$ のときには，第 k 項が余ってくる．したがって（*3.9*）を n の偶，奇に応じて

$$\left.\begin{aligned} P_{2k}(\cos\theta) &= \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(2s)!(4k-2s)!}{2^{4k-1}(s!)^2((2k-s)!)^2}\cos[(2k-2s)\theta] \\ &\quad + \frac{((2k)!)^2}{2^{4k}(k!)^4} \\ P_{2k+1}(\cos\theta) &= \sum_{s=0}^{k} \frac{(2s)!(4k+2-2s)!}{2^{4k+1}((2k+1-s)!)^2(s!)^2}\cos[(2k+1-2s)\theta] \end{aligned}\right\} \quad (3.10)$$

と表わすことができる.

つぎに (3.9) を用いて $P_n(\cos\theta)$ の値についての重要な性質を導くことができる. (3.9) を

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{r=0}^{n} c_r e^{i(2r-n)\theta}$$

と書こう. ここで $\theta=0$ とすれば

$$P_n(1) = \sum_{r=0}^{n} c_r$$

となるが, $P_n(1)=1$ であるから

$$\sum_{r=0}^{n} c_r = 1$$

という関係が成り立つ. したがって

$$|P_n(\cos\theta)| \leq \sum_{r=0}^{n} c_r = 1 \quad (3.11)$$

という不等式が得られた.

3.1.4 ルジャンドルの微分方程式　よく知られているようにラプラスの方程式 (3.2) を (3.3) で定義される球座標 (r,θ,φ) を用いて表わせば

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right) = 0 \quad (3.12)$$

となる. 一方, V を球座標で表わしたものはべき級数 (3.5) で与えられるから, (3.5) を上のラプラスの方程式に代入して $P_n(\cos\theta)$ の満足する微分方程式を導こう. まず (3.5) から

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{r_0{}^2}\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{1}{r_0{}^3}\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-2}$$

が得られる．不等式 (3.11) によってこれら二つのべき級数は $r<r_0$ のとき収束する．したがって (3.12) から

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-2}\left\{[n(n-1)+2n]P_n+\frac{d^2P_n}{d\theta^2}+\cot\theta\,\frac{dP_n}{d\theta}\right\}=0$$

という等式が導かれる．左辺は (r/r_0) のべき級数であるから，この関係が r の値に無関係に成り立つためには，P_n は微分方程式

$$\frac{d^2P_n}{d\theta^2}+\cot\theta\,\frac{dP_n}{d\theta}+n(n+1)P_n=0 \qquad (3.13)$$

の解でなければならない．これをルジャンドルの微分方程式とよんでいる．θ のかわりに $\zeta=\cos\theta$ を使えば (3.13) は

$$\frac{d}{d\zeta}\left\{(1-\zeta^2)\frac{dP_n}{d\zeta}\right\}+n(n+1)P_n=0 \qquad (3.14)$$

と表わすことができる．

この微分方程式を用いて，$P_n(\zeta)$ を ζ の多項式として直接求めよう．まず

$$P_n(\zeta)=\sum_{k=0}^{m}a_k\zeta^k$$

と仮定して，順次係数 $a_0, a_1, \cdots, a_m$ を定めることにする．そうすれば (3.14) から

$$0=\frac{d}{d\zeta}\left\{(1-\zeta^2)\frac{dP_n}{d\zeta}\right\}+n(n+1)P_n=\sum_{k=0}^{m}k(k-1)a_k\zeta^{k-2}$$
$$+\sum_{k=0}^{m}a_k\zeta^k[n(n+1)-k(k+1)]$$

が得られ，したがって ζ のべき係数はすべて 0 とならなければならない．まず ζ^m の係数を 0 とおけば

$$n(n+1)=m(m+1) \qquad (3.15)$$

となる．この方程式は二根 $m=n$ と $m=-n-1$ をもつが，$m=-n-1$ とすれば $P_n(\zeta)$ は ζ の多項式ではなくなるので求めている解を与えないので，$m=n$ が求めるものである．ζ^k $(0\leq k<n)$ の係数の比較から

$$a_{k+2}(k+2)(k+1)=a_k(k-n)(k+n+1)$$

あるいは

$$a_k = \frac{(k+2)(k+1)}{(k-n)(k+n+1)} a_{k+2} \tag{3.16}$$

が得られる．この漸化関係をくり返し用いると

$$a_{n-2s} = \frac{(-1)^s (n!)^2 (2n-2s)!}{(n-s)!s!(n-2s)!(2n)!} a_n$$

となる．ここで $a_n = (2n)!/2^n(n!)^2$ ととればけっきょく

$$a_{n-2s} = \frac{(-1)^s (2n-2s)!}{2^n s!(n-2s)!(n-s)!} \tag{3.17}$$

が得られる．したがって求める解は

$$P_n(\zeta) = \sum_{s=0}^{\sigma} a_{n-2s} \zeta^{n-2s} \tag{3.18}$$

となる．ここに σ は n が偶数のときは $(n/2)$，奇数のときは $(n-1)/2$ である．

3.1.5 ロドリーグの公式　このようにして求めた多項式解をより便利な形に表わしておこう．まず

$$\frac{d^n}{d\zeta^n}[\zeta^{2n-2s}] = \frac{(2n-2s)!}{(n-2s)!} \zeta^{n-2s}$$

という関係に注意すれば (3.18) は

$$P_n(\zeta) = \sum_{s=0}^{\sigma} \frac{(-1)^s}{2^n s!(n-s)!} \frac{d^n}{d\zeta^n}[\zeta^{2n-2s}]$$

と書くことができる．一方二項定理によって

$$(\zeta^2-1)^n = \sum_{s=0}^{n} {}_nC_s \zeta^{2n-2s}(-1)^s = \sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s n!}{(n-s)!s!} \zeta^{2n-2s}$$

が成り立つ．この表式を n 回微分すれば，$n-2s < 0$ の項は 0 となる．したがって

$$\sum_{s=0}^{\sigma} \frac{(-1)^s}{s!(n-s)!} \frac{d^n}{d\zeta^n}[\zeta^{2n-2s}] = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\zeta^n}[(\zeta^2-1)^n]$$

という関係が成り立つので，(3.18) は

$$P_n(\zeta) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{d\zeta^n}[(\zeta^2-1)^n] \tag{3.19}$$

と表わすことができる．これはロドリーグ (Rodrigues) の公式とよばれるものである．

こうして得られた多項式が，(3.5) で定義したルジャンドルの多項式と同一のものを確めておく必要がある．というのも (3.18) は微分方程式 (3.14) の解とはなっているが，(3.5) で定義したものと一致するとは限らないからである．いま (3.19) で $\zeta=1+\varepsilon\ |\varepsilon|\ll 1$ とおいて $\varepsilon\to 0$ の極限を求めると $P_n(1)=1$ であることがわかり，同じように $P_n(-1)=(-1)^n$ であることも示される．このように (3.19) で与えられる関数は (3.5) で定義した関数と同一の境界値をもつことになる．したがって微分方程式の解の一意性から，(3.19) で与えられる $P_n(\zeta)$ は，(3.5) で定義されたものと同一の関数であることが結論される．

3.1.6　ルジャンドル多項式の直交性　　ロドリーグによるルジャンドル多項式の表現 (3.19) は，いくつかの積分を求めるのに便利である．

$-1\leq\zeta\leq 1$ で与えられた関数 $f(\zeta)$ と $P_n(\zeta)$ の積の積分を求めてみよう．

$$I=\int_{-1}^{1}f(\zeta)P_n(\zeta)\,d\zeta$$

とすれば，部分積分によって

$$I=\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}f(\zeta)\frac{d^n}{d\zeta^n}\{(\zeta^2-1)^n\}\,d\zeta=\frac{1}{2^n n!}\left[\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\{(\zeta^2-1)^n\}f(\zeta)\right]_{-1}^{1}$$
$$-\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}f'(\zeta)\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\{(\zeta^2-1)^n\}\,d\zeta$$

もし $f(\zeta)$ が $\zeta=\pm 1$ で有限確定値をもてば右辺の第一項は 0 となる．この過程を n 回くり返せばけっきょく

$$\int_{-1}^{1}P_n(\zeta)f(\zeta)\,d\zeta=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(\zeta^2-1)^n f^{(n)}(\zeta)\,d\zeta \qquad (3.20)$$

という関係が得られる．とくにここで

$$f(\zeta)=\zeta^m \qquad (m\text{: 正整数})$$

とおけば

$$f^{(n)}(\zeta)=\begin{cases}\Gamma(m+1)\zeta^{m-n}/\Gamma(m-n+1) & m\geq n\\ 0,\ m<n,\end{cases}$$

であるから，(3.20) は

$$\int_{-1}^{1} P_n(\zeta)\zeta^m \, d\zeta = \frac{\Gamma(m+1)}{2^n n! \Gamma(m-n+1)} \int_{-1}^{1} (1-\zeta^2)^n \zeta^{m-n} \, d\zeta \qquad m \geq n$$

となる．したがってもし $m-n$ が奇数であればこの積分は 0 である．$m-n$ が偶数であれば，ベータ関数の定義 (*1.4*) と比較して上の積分は

$$\int_{-1}^{1} (1-\zeta^2)^n \zeta^{m-n} \, d\zeta = B\left(n+1, \frac{m-n+1}{2}\right) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m/2-n/2+1/2)}{\Gamma(m/2+n/2+3/2)}$$

で与えられるから，けっきょく

$$\int_{-1}^{1} P_n(\zeta)\zeta^m \, d\zeta = \begin{cases} 0 & m < n \\ \dfrac{m!\Gamma(m/2-n/2+1/2)}{2^n(m-n)!\Gamma(m/2+n/2+3/2)} & m-n \geq 0,\ m-n\text{: 偶数} \\ 0 & m-n \geq 0,\ m-n\text{: 奇数} \end{cases}$$

という結果が得られる．

(*3.20*) の第二の応用として，$f(\zeta) = P_m(\zeta)$ の場合を考えよう．$P_m(\zeta)$ は ζ の m 次の多項式であるからあきらかに

$$\frac{d^n P_m(\zeta)}{d\zeta^n} = 0 \qquad n > m$$

したがって (*3.20*) から，もし $n > m$ であれば

$$\int_{-1}^{1} P_n(\zeta) P_m(\zeta) \, d\zeta = 0$$

となる．この等式の左辺は m, n について対称であるから，けっきょく

$$\int_{-1}^{1} P_n(\zeta) P_m(\zeta) \, d\zeta = 0 \qquad m \neq n \tag{3.21}$$

という関係が導かれる．すなわち $n \neq m$ であるとき，$P_n(\zeta)$ と $P_m(\zeta)$ は直交しているのである．

つぎに $m = n$ であるときの積分 (*3.21*) の値を求めておこう．ロドリーグの公式から

$$\frac{d^n P_n(\zeta)}{d\zeta^n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

ここで (*3.20*) を用いると

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(\zeta) \, d\zeta = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \int_{-1}^{1} (1-\zeta^2)^n \, d\zeta = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)}$$

となる．ここでまたガンマ関数の倍法公式 (*1.24*) を代入すれば

$$\int_{-1}^{1} P_n{}^2(\zeta)\,d\zeta = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\cdot\frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1} \qquad (3.22)$$

が得られる．

3.2 ルジャンドル関数

3.2.1 第一種ルジャンドル関数　ν が必ずしも正整数でない場合，複素平面上で与えられたルジャンドルの微分方程式

$$\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{df}{dz}\right\}+\nu(\nu+1)f=0 \qquad (3.23)$$

を考えてその解を求めよう．そのような解はあとで取り扱う偏微分方程式（熱伝導方程式）の境界値問題で必要となることがある．まず (3.23) で $z=1-2t$ とおけば

$$t(1-t)\frac{d^2f}{dt^2}+(1-2t)\frac{df}{dt}+\nu(\nu+1)f=0$$

となる．この方程式の級数解を求めるために

$$f=t^\alpha\sum_{m=0}^{\infty}a_m t^m$$

とおいて，微分方程式に代入し，t のべき係数を 0 とおけば

$$a_0\alpha^2=0,$$
$$a_m[\nu(\nu+1)-(\alpha+m)(\alpha+m+1)]+a_{m+1}(\alpha+m+1)^2=0$$

が得られる．$\alpha=0$ とすると第二の等式から漸化関係は

$$a_{m+1}=-\frac{\nu(\nu+1)-m(m+1)}{(m+1)^2}a_m$$

となり，係数 $a_1, a_2, \cdots$ が逐次 a_0 から求められる．$a_0=1$ ととれば

$$f(t)=1-\nu(\nu+1)t+\frac{\nu(\nu+1)(\nu-1)(\nu+2)}{1^2\cdot 2^2}t^2$$
$$-\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu-1)(\nu-2)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}t^3+\cdots$$

という級数解が得られることになる．ν が正整数 n に等しいとき，この f はルジャンドルの多項式 $P_n(z)$ になることを示そう．まず $t=0$ $(z=1)$ とおけばあきらかに

$$f(0)=1,\ f'(0)=-n(n+1)$$

であるから，f を z の関数とみなせば

$$f=1,\qquad \frac{df}{dz}=+\frac{1}{2}n(n+1),\qquad z=1.$$

他方 $P_n(1)=1$ であることはすでに 3.1.2 項で示した．また $P_n'(1)=n(n+1)/2$ も，漸化式 (3.8) をくり返し用いて示すことができる．このように f と P_n は同一の微分方程式を満足し，しかも $z=1$ ではそれらの値は等しく，導関数も同一の値をもつから，同一の関数である．したがって

$$P_\nu(z)=1-\nu(\nu+1)\left(\frac{1-z}{2}\right)+\frac{\nu(\nu+1)(\nu-1)(\nu+2)}{1^2\cdot 2^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2$$
$$-\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu-1)(\nu-2)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^3+\cdots \qquad (3.24)$$

を ν 次のルジャンドル関数とよぶことにしよう．この級数の一般項は $a_m\cdot[(1-z)/2]^m$ で与えられる．ただし

$$a_m=\frac{(-1)^m\nu(\nu+1)\cdots(\nu+m)(\nu-1)\cdots(\nu-m+1)}{(m!)^2}.$$

ここで a_m と a_{m+1} の比をとれば

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right|=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{(\nu+m+1)(m-\nu-2)}{(m+1)^2}\right|=1$$

したがって，ダランベールの収束に関する判定条件によって (3.24) の収束半径は 1 となり，$P_\nu(z)$ は

$$|(1-z)/2|<1\qquad |z-1|<2$$

で収束する．いいかえれば中心が $z=1$ にあり半径 2 である円の内部で，(3.24) はルジャンドル微分方程式の解となっている．

(3.24) で与えられるルジャンドル関数の級数表示は $z=1$ の近傍ではその挙動を知るのに都合がよいが，$z=-1$ の近傍での解の性質を与えない．その点の近傍での解を求めるには別の方法による必要がある．そのため (3.23) で $2t=1+z$ とおけば，f に関する方程式は $z=1-2t$ とおいたときと形式的に同じになることに注意する．したがって一つの解は

$$f_1(t)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m t^m=1-\nu(\nu+1)t+\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu-1)}{1^2\cdot 2^2}t^2$$

$$-\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu-1)(\nu-2)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}t^3+\cdots\quad t=(1+z)/2$$

となる．指数決定式の二根 α_1 と α_2 の差がこの場合 0 であるので，係数を定める漸化式に形式的に $\alpha=0$ を代入して $f_1(t)$ と独立な解を求めることはできない．そのためには

$$f_2(t)=f_1(t)\log t+g(t),\qquad g(t)=\sum_{m=1}^{\infty}b_m t^m$$

とおき，未定係数を微分方程式に代入して定めるというよく知られた方法を用いるのがよい．実際 $f_2(t)$ を微分方程式に代入すれば

$$(t-t^2)\frac{d^2g}{dt^2}+(1-2t)\frac{dg}{dt}+\nu(\nu+1)g=f_1+(2t-2)\frac{df_1}{dt}$$

となるから，両辺の t のべきの係数を比較して未定係数間の漸化関係

$$b_1=a_0-2a_1,$$

$$(m+1)^2b_{m+1}-[m(m+1)-\nu(\nu+1)]b_m=(1+2m)a_m-2(m+1)a_{m+1}\quad m\geq 1$$

が導かれる．この関係から定まる係数を陽に求めるのは繁雑であるので，直接に求めることをせず，この係数をもつべき級数の収束半径のみを間接的に求めよう．まず右辺を計算するために a_m の陽な表現を使えば

$$\begin{aligned}&(1+2m)a_m-2(1+m)a_{m+1}\\&\quad=\frac{(-1)^m\nu(\nu+1)\cdots(\nu+m)(\nu-1)\cdots(\nu-m+1)}{(m!)^2}\left[1+\frac{2\nu(\nu+1)}{m+1}\right]\\&\quad=(-1)^m\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)(m!)^2}\left[1+\frac{2\nu(\nu+1)}{m+1}\right]\end{aligned}$$

となる．これは (*1.14*) によって

$$\frac{\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(m-\nu)}{\pi(m!)^2}\sin\nu\pi$$

と変形できる．この表式の $m\to\infty$ のときの値はスターリングの公式 (*2.73*) を使えば計算できて

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(m-\nu)}{(m!)^2}=0$$

となる．したがって

$$\lim_{m\to\infty}\frac{b_m}{b_{m+1}}=1$$

となり，ダランベールの判定条件によって級数 $\sum_{m=1}^{\infty} b_m t^m$ は $|t|<1$，すなわち $|z+1|<2$ で収束する．$f_1(t)$ も同じ z の変域で収束するから

$$f_2(t)=f_2\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

は $z=-1$ を除けば $|z+1|<2$ で正則な関数である．したがって $f_1\left(\frac{z+1}{2}\right)$ と $f_2\left(\frac{z+1}{2}\right)$ とがこの領域での独立な解である．

さて (3.24) で与えられるルジャンドル関数は $|z-1|/2<1$ で正則であるから，共通の領域で $P_\nu(z)$ は f_1 と f_2 の1次結合として表現される；

$$P_\nu(z)=Af_1\left(\frac{z+1}{2}\right)+Bf_2\left(\frac{z+1}{2}\right)$$

定数 A, B はこの領域内のある点（例えば $z=0$）での両辺の関数値と微係数を比較して定めることができる．このようにして得た関数は共通領域では (3.24) で与えられる関数と同一の値をもつ正則関数であるから，それを領域 $|z+1|<2$ に解析接続したものである．そこでは $P_\nu(z)$ は

$$P_\nu(z)=AP_\nu(-z)+B\left\{\log\frac{1+z}{2}P_\nu(-z)+g\left(\frac{z+1}{2}\right)\right\}\qquad |z+1|<2$$

で与えられる．この関係からわかるように一般の ν の値に対して $P_\nu(z)$ は $z=-1$ はで対数的特異点をもつことになる．ν が整数 n のとき，$P_n(z)$ は多項式であるから，それは特異点をもたない．そのとき (3.18) により

$$P_n(z)=(-1)^n P_n(-z)$$

が成り立つ．

3.2.2 ルジャンドル関数の積分表示　前節で得たルジャンドル関数をさらに拡い領域にまで解析接続することを考える．そのために複素積分を用いて $P_\nu(z)$ を表現することを考えてみよう．その手がかりとなるのがロドリーグの公式 (3.19) と，複素関数論のグールサ (Goursat) の定理である．

グールサの定理　z-平面上の閉曲線 C 上およびその内部で正則な関数 $f(z)$ の n 階微分 $f^{(n)}(z)$ は，z が C 内にあるとき

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{3.25}$$

で与えられる．

公式 (3.25) で $f(z)=(z^2-1)^n/2^n n!$ とおいてロドリーグの公式を用いると

$$P_n(z)=\frac{1}{2^n 2\pi i}\int_C\frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}}dt$$

という関係が得られる．C は点 z を内部に含む任意の閉曲線である．これをシュレーフリ (Schläfli) の積分という．一般の ν に対して $P_\nu(z)$ はこの積分を変形して求めることができる．いま積分

$$P_\nu(z)=\frac{1}{2^\nu 2\pi i}\int_C\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}dt \tag{3.26}$$

を考えよう．$P_\nu(z)$ の微分を計算すれば

$$\frac{dP_\nu}{dz}=\frac{(\nu+1)}{2^\nu 2\pi i}\int_C\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+2}}dt, \quad \frac{d^2P_\nu}{dz^2}=\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2^\nu 2\pi i}\int_C\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+3}}dt$$

であるから，これらの表式をルジャンドルの微分方程式に代入すれば

$$(1-z^2)\frac{d^2P_\nu}{dz^2}-2z\frac{dP_\nu}{dz}+\nu(\nu+1)P_\nu$$
$$=\frac{(\nu+1)}{2^\nu 2\pi i}\int_C\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+3}}[\nu t^2-2\nu tz+\nu+2-2tz]dt$$

となる．かっこの中の表式は

$$2(\nu+1)t(t-z)-(\nu+2)(t^2-1)$$

であるから，上式の右辺は

$$\frac{(\nu+1)}{2^\nu 2\pi i}\int_C\frac{d}{dt}\left[\frac{(t^2-1)^{\nu+1}}{(t-z)^{\nu+2}}\right]dt$$

となる．したがって C に沿って一周したときに関数 $(t^2-1)^{\nu+1}(t-z)^{-\nu-2}$ がもとの値にもどれば，積分 (3.26) は微分方程式の解である．この関数は ν が整数でないとき，分岐点 $t=\pm 1$, $t=z$ をもっている．分岐点 $t=1$ を正の向き（反時計回り）に1周すれば関数の絶対値はもとにもどり，偏角は $2\pi i(\nu+1)$ だけ増す．分岐点 $t=z$ を正の向きに1周すれば，関数の絶対値はもとにもどり，偏角は $2\pi i(-\nu-2)$ だけ増す．したがって C として $t=1$

を正の向きに, $t=z$ を正の向きに回わるが, $t=-1$ を内部に持たない閉曲線にとれば, $(t^2-1)^{\nu+1}(t-z)^{-\nu-2}$ は t が C に沿って1周したとき, もとの値にもどるから, シュレーフリの積分 (3.26) はルジャンドル微分方程式の解である. こうして与えられた関数 $P_\nu(z)$ が級数表示 (3.24) と一致することはつぎのようにして確めることができる.

C として半径が $R<2$, 中心が $t=1$ にある円をとる. このとき円周上で

$$t-1=Re^{i\theta} \qquad 0\leq\theta<2\pi$$

である. また $|z-1|<R$ としておけば

$$(t-z)^{-\nu-1}=(t-1)^{-\nu-1}\left(1-\frac{z-1}{t-1}\right)^{-\nu-1}$$

$$=(t-1)^{-\nu-1}\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{z-1}{t-1}\right)^m\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{m!\Gamma(\nu+1)}\right\}$$

となって, この級数は一様に収束する. この表式を (3.26) に代入して項別に積分を行う. まず

$$(t+1)^\nu=[(t-1)+2]^\nu=2^\nu\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+1)}{r!\Gamma(\nu+1-r)}\left(\frac{t-1}{2}\right)^r$$

に注意すれば

$$\int_C(t+1)^\nu(t-1)^{-m-1}\,dt=2^\nu\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+1)}{r!\Gamma(\nu+1-r)2^r}\int_C(t-1)^{r-m-1}\,dt$$

$$=2\pi i\cdot 2^{\nu-m}\frac{\Gamma(\nu+1)}{m!\Gamma(\nu+1-m)}$$

が得られるから, (3.26) は

$$P_\nu(z)=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{(m!)^2\Gamma(\nu+1-m)}\left(\frac{z-1}{2}\right)^m \qquad |z-1|<R<2$$

となる. これは (3.24) に他ならない.

3.2.3 第二種ルジャンドル関数　ルジャンドルの多項式を求めた過程をもう一度考えてみると, 指数決定式 (3.15) の根 $m=n$ と, $m=-n-1$ のうち前者を用いて, 解 (3.18) を導いた. したがってルジャンドルの微分方程式のもう一つの解は他の根 $m=-n-1$ を用いると得ることができる. 係数間の漸化式 (3.16) はそのまま成り立つから, 逐次係数は定められる:

$$a_{-n-3}=\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)\cdot 2}a_{-n-1},\quad a_{-n-5}=\frac{(n+3)(n+4)}{(2n+5)\cdot 4}a_{-n-3},\cdots$$

n が -1 より大であれば，n が整数であるか否かにかかわらず，係数は無限に続くから第二の解は多項式とはならない．したがって n を整数に限っておく必要はない．n を一般の値 ν でおきかえても，これまでの議論はそのまま成り立つから，$a_{-\nu-1}=\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)/2^{\nu+1}\Gamma(\nu+3/2)$ とおいて得られる級数

$$Q_\nu(z)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)z^{-\nu-1}}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+3/2)}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+2k)}{2^k k!(2\nu+3)(2\nu+5)\cdots(2\nu+2k+1)}z^{-2k}\right\} \tag{3.27}$$

はルジャンドル微分方程式 (3.23) の解である．ダランベールの判定条件から，この級数は $|z|>1$ で収束することがわかる．したがって変域 $|z|<1$ での解を求めるには他の方法によらなければならない．

シュレーフリの積分 (3.26) の類推から

$$Q_\nu(z)=\frac{1}{2^{\nu+2}i\sin\nu\pi}\int_D\frac{(t^2-1)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}}dt \tag{3.28}$$

もまた，積分路 D を適当にとればルジャンドル微分方程式の解となり得ることがわかる．しかしこの関数が $P_\nu(z)$ と独立な関数であるためには，D は C とは異なったものでなければならない．D として，関数 $(t^2-1)^{\nu+1}(z-t)^{-\nu-2}$ の分岐点 $t=1$ を負の向きに，$t=-1$ を正の向きに回わる8の字形閉曲線ととり，$t=z$ がその外にあれば，(3.28) はルジャンドル微分方程式の解となっている．このように D をとったとき，(3.28) で与えられる関数を第二種ルジャンドル関数とよんでいる．

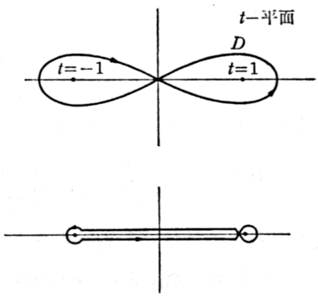


図 3.2　$Q_\nu(z)$ の積分路，下の図で $t=\pm1$ を中心とする円の半径は ε である．

(3.28) で定義した $Q_\nu(z)$ が，$|z|>1$ で無限級数 (3.27) と一致することはつぎのようにして確めることができる．まず図 3.2 にあるように，積分路をとる．$R(\nu+1/2)>0$ と仮定すれば，

$t=1,\ t=-1$ のまわりからの積分への寄与は，半径 ε を 0 に近づけると 0 になる．したがって

$$Q_\nu(z)=\frac{1}{2^{\nu+2}\,i\sin\nu\pi}\left\{e^{-\nu\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^\nu}{(z-x)^{\nu+1}}\,dx-e^{\nu\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^\nu}{(z-x)^{\nu+1}}\,dx\right\}$$

$$=2^{-\nu-1}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^\nu(z-x)^{-\nu-1}\,dx,\qquad R\left(\nu+\frac{1}{2}\right)>0$$

を得る．ここで $|z|>1$ と仮定し，$(z-x)^{-\nu-1}$ を級数展開すれば，$Q_\nu(z)$ は

$$Q_\nu(z)=2^{-\nu-1}\,z^{-\nu-1}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^\nu\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{m!\,\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{z}\right)^m\right\}dx$$

$$=2^{-\nu-1}\,z^{-\nu-1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+2k+1)\Gamma(k+1/2)}{(2k)!\,\Gamma(\nu+k+3/2)}\,z^{-2k}\right\}$$

となって，(*3.27*) と一致する．この級数は ν には無関係に $|z|>1$ で収束し，また ν の解析関数である．したがって ν の値とは無関係に，積分表示 (*3.38*) と同一の関数を与える．

3.2.4 $|z|<1$ での第二種ルジャンドル関数の級数表示　$P_\nu(z)$ の $|1-z|<2$ での級数表示と $Q_\nu(z)$ の $|z|>1$ での級数表示はそれぞれ (*3.24*)，(*3.27*) で与えられる．いくつかの応用問題ではこれらの級数表示では不十分なのでここではこれら以外の z の変域における級数表示を求めて，議論を完全なものとしよう．そのためにはまず第一種ルジャンドル関数から始めるのが，議論に便利である．

シュレーフリの積分表示 (*3.26*) の被積分関数を図 3.3 に示された径路に沿って積分してみよう．まず d に沿っての積分では a に沿っての積分よりも，被積分関数は偏角が $2\pi\nu$ だけ大きい．同じように c に沿っては，被積分関数の偏角は b に沿ってよりも $2\pi\nu$ だけ大きい．もし $-1<R(\nu)<0$ であれば，$t=z,\ t=1$ のまわりからの積分への寄与は 0 となし得るから，一周積分の値は

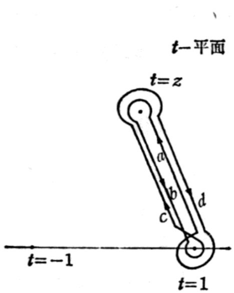


図 3.3 積 分 路

$$\int_a+\int_b+\int_c+\int_d=(1-e^{2\pi\nu i})\int_a+(1-e^{2\pi\nu i})\int_b$$

$$=-e^{\pi\nu i}\,2i\sin\nu\pi\cdot\int_{a+b}(t^2-1)^\nu(t-z)^{-\nu-1}\,dt$$

となる．一方

$$P_\nu(z)=2^{-\nu}(2\pi i)^{-1}\int_{a+b}(t^2-1)^\nu(t-z)^{-\nu-1}\,dt$$

であるから

$$P_\nu(z)=\frac{e^{-\nu\pi i}}{4\pi\cdot 2^\nu\sin\nu\pi}\int_{a+b+c+d}\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\,dt$$

となる．$P_\nu(z)$ は ν の正則な関数であるから，$-1<R(\nu)<0$ の制限のもとで得られた関係は，この制限を取り除いても成り立つ．こうして

$$P_\nu(z)=\frac{e^{-\nu\pi i}}{4\pi\,2^\nu\sin\nu\pi}\int^{(z+,1+,z-,1-)}\frac{(t^2-1)^\nu}{(t-z)^{\nu+1}}\,dz \qquad (3.29)$$

という表示が得られる，ここで積分路は図 3.3 に示されたものである．

さて，$(t^2-1)^\nu(t-z)^{-\nu-1}$ を図 3.4 に示された三つの径路に沿っての積分を考えよう．A は $t=1$, $t=-1$ の間の実数軸上にあるとし，$t-1$ の A における偏角は π ととっておく．A から出発して，$t=-1$, $t=1$, $t=z$ を正の向きに回わった積分の値をそれぞれ，L, M, N とする．

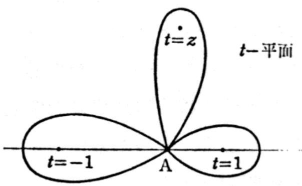


図 3.4　積分路，A は $-1<t<1$ の実数軸上の点

ここで積分

$$\int^{(z+,1+,z-,1-)}(t^2-1)^\nu(t-z)^{-\nu-1}\,dt$$

を考えると，これは A から出発し，z を正の向きに回わって A にもどる積分，A から 1 を正の向きに回わり，A にもどる積分，A から z を負の向きに回わる積分と A を出発し，1 を負の向きに回わる積分とから成っている．被積分関数の，各積分路での偏角に注意すれば

$$\left.\begin{aligned}\int^{(z+,1+,z-,1-)}(t^2-1)^\nu(t-z)^{-\nu-1}\,dt &= N+Me^{-2\pi(\nu+1)i}-Ne^{2\nu\pi i}-M\\ \int^{(z+,-1+,z-,-1-)}(t^2-1)^\nu(t-z)^{-\nu-1}\,dt &= N+Le^{-2\pi(\nu+1)i}-Ne^{2\nu\pi i}-L\end{aligned}\right\} \tag{3.30}$$

である．他方，$\int^{(-1+,1-)}(t^2-1)^\nu(t-z)^{-\nu-1}\,dt$ の値を考えて，被積分関数の偏角は $Q_\nu(z)$ の定義 (3.28) においてと同様にとるものとしよう．そうすれば，$I(z)>0$ であればこの積分の値は $(L-M)e^{-2\nu\pi i}$, $I(z)<0$ であれば，$L-M$ である．したがって (3.30) を解いて $L-M$ の値を求めるとけっきよく

$$\int^{(-1+,1-)}(t^2-1)^\nu(t-z)^{-\nu-1}\,dt = \frac{e^{-2\nu\pi i}}{1-e^{-2\nu\pi i}}\left(\int^{(z+,1+,z-,1-)}\right.$$
$$\left.-\int^{(z+,-1+,z-,-1-)}\right)(t^2-1)^\nu(t-z)^{-\nu-1}\,dt, \qquad I(z)>0$$

$$\int^{(-1+,1-)}(t^2-1)^\nu(t-z)^{-\nu-1}\,dt = \frac{1}{1-e^{-2\nu\pi i}}\left(\int-\int\right)(t^2-1)^\nu(t-z)^{-\nu-1}\,dt,$$
$$I(z)<0 \tag{3.31}$$

という結果が得られる．ところで (3.31) の第一の積分は (3.29) によって，$P_\nu(z)$ を用いて表わされるから，(3.31) の第二の積分を計算してみる．まず

$$t+1=(z+1)u$$

と変数変換をすれば (3.31) の第二の積分は

$$2^\nu\int^{(1+,0+,1-,0-)}u^\nu\left(\frac{z+1}{2}u-1\right)^\nu(u-1)^{-\nu-1}\,du$$

となる．これを計算するために $I(z)\gtrless 0$ に応じて

$$\frac{z+1}{2}u-1=e^{\pm\pi i}\left(1-\frac{z+1}{2}u\right)$$

に注意する．いずれの場合にも，$1-(z+1)u/2$ の偏角は，実数軸上 $u=0$ で 0 であるから，$(1-(z+1)u/2)^\nu$ をそのまま二項展開することができる．展開された級数は $|(z+1)/2|<1$ のとき一様収束するから積分は

$$e^{\pm\nu\pi i}\,2^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\nu+1)}{m!\,\Gamma(\nu+1-m)}\left(\frac{z+1}{2}\right)^m\int^{(1+,0+,1-,0-)}u^\nu(u-1)^{-\nu-1}u^m\,du$$

となる．この積分はつぎのようにして求めることができる．まず積分路を図

3.5 で示したように変形し，また

$$u-1=xe^{i\theta}$$

とおく．$-1<R(\nu)<0$ であれば，$u=1$ と $u=0$ のまわりの円に沿っての積分は円の半径を無限に小さくした極限では 0 となる．I に沿っては $\theta=\pi$，II に沿っての積分は絶対値は同じで（向きは反対），偏角は $2\pi(\nu+1)$ だけ大きいから



図 3.5　積　分　路

$$\int_{\mathrm{I}+\mathrm{II}} u^{\nu+m}(u-1)^{-\nu-1}\,du=\int_0^1(1-x)^{\nu+m}x^{-\nu-1}\,dx(e^{\pi(\nu+1)i}-e^{-\pi(\nu+1)i})$$

$$=-2i\sin\nu\pi\frac{\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(-\nu)}{\Gamma(m+1)}$$

が得られる．III に沿っての積分は II に沿ってよりも偏角が $2\pi(\nu+m)$ だけ大きく，IV に沿っては I よりも偏角が $2\pi(\nu+m)$ だけ大きい．したがって

$$\int_{\mathrm{III}+\mathrm{IV}} u^{\nu+m}(1-u)^{-\nu-1}\,du=2i\sin\nu\pi e^{2\pi\nu i}\frac{\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(-\nu)}{m!}$$

となる．二つの積分を加えて，公式 (*1.14*) を用いると，$I(z)>0$ のとき

$$\int^{(1+,0+,1-,0-)} u^{\nu}(u-1)^{-\nu-1}u^m\,du$$

$$=2^{\nu+2}\pi e^{2\nu\pi i}\sin\nu\pi\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\nu+m+1)}{(m!)^2\Gamma(\nu+1-m)}\left(\frac{z+1}{2}\right)^m \tag{3.32}$$

となる．$I(z)<0$ のとき，$e^{2\nu\pi i}$ は 1 で置き換えられる．右辺は ν の値にかかわらず ν の正則関数であり，左辺の積分もそうであるから，この関係は ν とは無関係に成り立つ．

(*3.29*), (*3.32*) を (*3.31*) に代入し，$Q_\nu(z)$ は積分表示 (*3.28*) で与えられることに注意すれば $Q_\nu(z)$ の級数による表示

$$Q_\nu(z)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left\{e^{\mp\nu\pi i}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\nu+m+1)}{(m!)^2\Gamma(\nu+1-m)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^m\right.$$

$$\left.-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\nu+m+1)}{(m!)^2\Gamma(\nu+1-m)}\left(\frac{1+z}{2}\right)^m\right\},\quad |z-1|<2,\ |z+1|<2 \tag{3.33}$$

が得られる．ここで $P_\nu(z)$ の級数表示 (*3.24*) を用いた．また指数関数の－符号は $I(z)>0$ のとき，＋符号は $I(z)<0$ に対応する．

さてルジャンドル微分方程式の基本解として $P_\nu(z)$, $Q_\nu(z)$ を求めたが，微分方程式で ν のかわりに $-\nu-1$ とおいても方程式は不変である．その方程式の解は $P_{-\nu-1}(z)$, $Q_{-\nu-1}(z)$ であるから，これら四つの関数のうちで二つを基本解ととれば，それらで残りの二つを表現することができるはずである．ここでそれらの関係を調べてみよう．

まず (3.24) で ν のかわりに $-\nu-1$ とすれば

$$P_{-\nu-1}(z)=P_\nu(z) \tag{3.34}$$

がただちに得られる．この関係は級数 (3.24) が収束する z の領域において得られたが，積分表示 (3.26) でこの領域外に解析接続したとき，$P_\nu(z)$ は z の正則関数であるから，(3.34) は $P_\nu(z)$ が定義されるすべての z の値に対して成り立つ．

つぎに (3.33) で ν のかわりに $-\nu-1$ とおいてみよう．第一の級数は $P_\nu(z)$ に他ならないから，そのまま残る．第二の級数は第一の級数と係数は同じであるから，ν のかわりに $-\nu-1$ とおいても値はかわらない．したがって

$$Q_{-\nu-1}(z)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left\{e^{\pm(\nu+1)\pi i}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\nu+m+1)}{(m!)^2\Gamma(\nu+1-m)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^m\right.$$
$$\left.-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\nu+m+1)}{(m!)^2\Gamma(\nu+1-m)}\left(\frac{1+z}{2}\right)^m\right\}$$

が成り立つ．(3.33) とこの等式から二番目の級数を消去すれば

$$\pi\cos\nu\pi\,P_\nu(z)=\sin\nu\pi\,[Q_\nu(z)-Q_{-\nu-1}(z)]$$

という関係が得られる．もし ν が半整数であれば左辺は 0 となるから

$$Q_{-\nu-1}(z)=Q_\nu(z),\qquad \nu:\ \text{半整数}$$

となる．一般の ν の値に対しては

$$P_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\tan\nu\pi\,[Q_\nu(z)-Q_{-\nu-1}(z)] \tag{3.35}$$

という結果が得られる．

$Q_\nu(z)$ の $|z|>1$での級数による表示は(3.27) であるから，それを(3.35) に代入すれば $|z|>1$ での $P_\nu(z)$ の級数表示が得られることになる；

$$P_\nu(z) = \tan\nu\pi\cdot\frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,(2z)^{\nu+1}\Gamma(\nu+3/2)}\times$$
$$\left\{1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+2k)}{(2k)!(2\nu+3)\cdots(2\nu+2k+1)}\left(\frac{1}{z}\right)^{2k}\right\}$$
$$+\frac{\Gamma(\nu+1/2)(2z)^\nu}{\Gamma(\nu+1)\sqrt{\pi}}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\nu)(-\nu+1)\cdots(-\nu+2k-1)}{(2k)!(-2\nu+1)\cdots(-2\nu+2k-1)}\left(\frac{1}{z}\right)^{2k}\right\},$$
$$|z|>1. \qquad (3.36)$$

3.2.5 ルジャンドル関数のロンスキアン　　ルジャンドル微分方程式

$$\frac{d}{dz}\cdot\left\{(1-z^2)\frac{df}{dz}\right\}+\nu(\nu+1)f=0$$

の基本解 $P_\nu(z)$, $Q_\nu(z)$ のロンスキアンを求めよう．容易に等式

$$\frac{d}{dz}\{P_\nu(z)Q_\nu'(z)-Q_\nu(z)P_\nu'(z)\} = \frac{2z}{1-z^2}\{P_\nu(z)Q_\nu'(z)-Q_\nu(z)P_\nu'(z)\}$$

を導くことができる．この等式を z について積分すれば

$$P_\nu(z)Q_\nu'(z)-Q_\nu(z)P_\nu'(z) = \frac{c}{1-z^2}$$

となる．ここに c は積分定数である．この関係は z のすべての値に対して成り立つから，定数 c はこの等式の両辺の $|z|\to\infty$ での挙動から定めることができる．まず (3.36) から

$$P_\nu(z)\sim\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)\sqrt{\pi}}(2z)^\nu, \qquad |z|\gg 1$$

一方，(3.27) から

$$Q_\nu(z)\sim\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)(2z)^{\nu+1}}, \qquad |z|\gg 1.$$

ゆえに

$$P_\nu(z)Q_\nu'(z)-Q_\nu(z)P_\nu'(z)\sim-\frac{(\nu+1/2)\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+3/2)}z^{-2}$$

となる．よって積分定数 c は1でなければならない．こうして

$$P_\nu(z)Q_\nu'(z)-Q_\nu(z)P_\nu'(z) = \frac{1}{1-z^2} \qquad (3.37)$$

という結果が得られた．

3.2.6 ルジャンドル関数の漸化式　　ルジャンドルの多項式がいくつかの漸

化関係をもつことはすでに 3.1.2 項で示したが，積分 (3.28), (3.36) で与えられるルジャンドル関数も同じ漸化式を満たすことは容易に示すことができる．まず (3.28) を使って，$|z|>1$ で

$$(\nu+1)Q_{\nu+1}(z) = (\nu+1)2^{-\nu-2}z^{-\nu-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+2k+2)\Gamma(k+1/2)}{(2k)!\Gamma(\nu+k+5/2)}z^{-2k},$$

$$\nu Q_{\nu-1}(z) = \nu 2^{-\nu}z^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+2k)\Gamma(k+1/2)}{(2k)!\Gamma(\nu+k+1/2)}z^{-2k}$$

であるから，これらを加えると

$$(\nu+1)Q_{\nu+1}(z)+\nu Q_{\nu-1}(z) = 2^{-\nu}z^{-\nu}\left\{\frac{\Gamma(\nu)\Gamma(1/2)\nu}{\Gamma(\nu+1/2)}\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\nu\Gamma(\nu+2k)\Gamma(k+1/2)}{(2k)!\Gamma(\nu+k+1/2)}z^{-2k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\nu+1)\Gamma(\nu+2k)\Gamma(k-1/2)}{4(2k-2)!\Gamma(\nu+k+3/2)}z^{-2k}\right\}$$

となる．ところが

$$\frac{\nu\Gamma(\nu+2k)\Gamma(k+1/2)}{(2k)!\Gamma(\nu+k+1/2)}+\frac{(\nu+1)\Gamma(\nu+2k)\Gamma(k-1/2)}{4(2k-2)!\Gamma(\nu+k+3/2)}$$

$$=\frac{\Gamma(\nu+2k)\Gamma(k-1/2)}{\Gamma(\nu+k+1/2)(2k-2)!}\cdot\frac{(\nu+2k)(\nu+1/2)}{4k(\nu+k+1/2)}$$

$$=\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma(\nu+2k+1)\Gamma(k+1/2)}{(2k)!\Gamma(\nu+k+3/2)}$$

であるから，これを $Q_\nu(z)$ と比較すると上の等式の右辺は $(2\nu+1)zQ_\nu(z)$ となっていることがわかる．したがって

$$(\nu+1)Q_{\nu+1}(z)+\nu Q_{\nu-1}(z) = (2\nu+1)zQ_\nu(z) \tag{3.38}$$

という漸化式が得られる．この関係は $|z|>1$ として得られたが，積分表示 (3.28) で $|z|<1$ に解析接続してもそのまま成り立つ．

同様にして

$$Q_{\nu+1}'(z)-zQ_\nu'(z) = -2^{-\nu-2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+2k)(\nu+2k)\Gamma(k-1/2)}{(2k-2)!\Gamma(\nu+k+3/2)}z^{-2k-\nu-1}$$

$$+2^{-\nu-1}\left\{\frac{(\nu+1)\Gamma(\nu+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(\nu+3/2)}z^{-\nu-1}\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+\nu+1)\Gamma(2k+\nu+1)\Gamma(k+1/2)}{(2k)!\Gamma(\nu+k+3/2)}z^{-2k-\nu-1}\right\}.$$

ところが

$$\frac{(2k+\nu+1)\Gamma(2k+\nu+1)\Gamma(k+1/2)}{(2k)!\,\Gamma(\nu+k+3/2)}-\frac{(\nu+2k)\Gamma(\nu+2k)\Gamma(k-1/2)}{2(2k-2)!\,\Gamma(\nu+k+3/2)}$$

$$=\frac{(\nu+1)\Gamma(k+1/2)\Gamma(\nu+2k+1)}{(2k)!\,\Gamma(\nu+k+3/2)}$$

であるから，上の等式の右辺は $(\nu+1)Q_\nu(z)$ であることがわかる．したがって

$$Q_{\nu+1}'(z)-zQ_\nu'(z)=(\nu+1)Q_\nu(z) \tag{3.39}$$

が得られた．また (3.38) と (3.39) とから

$$zQ_\nu'(z)-Q_{\nu-1}'(z)=\nu Q_\nu(z) \tag{3.40}$$

という漸化式をも導くことができる．

これらの漸化式から，第一種ルジャンドル関数 $P_\nu(z)$ の漸化式が求められる．(3.35) を用いれば

$$\begin{aligned}(\nu+1)P_{\nu+1}(z)+\nu P_{\nu-1}(z)&=\frac{\nu+1}{\pi}\tan\nu\pi[Q_{\nu+1}(z)-Q_{-\nu-2}(z)]\\&\quad+\frac{\nu}{\pi}\tan\nu\pi[Q_{\nu-1}(z)-Q_{-\nu}(z)]\\&=\frac{2\nu+1}{\pi}\tan\nu\pi\, zQ_\nu(z)-\frac{2\nu+1}{\pi}\tan\nu\pi\, zQ_{-\nu-1}(z).\end{aligned}$$

したがって

$$(\nu+1)P_{\nu+1}(z)+\nu P_{\nu-1}(z)=(2\nu+1)zP_\nu(z) \tag{3.41}$$

が得られる．同じようにして

$$\left.\begin{aligned}zP_\nu'(z)-P_{\nu-1}'(z)&=\nu P_\nu(z)\\P_{\nu+1}'(z)-zP_\nu'(z)&=(\nu+1)P_\nu(z)\end{aligned}\right\} \tag{3.42}$$

という関係も導くことができる．

(3.27) で $\nu=0$ とおけば，$Q_0(z)$ は $1/z$ のべき級数

$$Q_0(z)=z^{-1}\left\{1+\frac{1}{3z^2}+\frac{1}{5z^4}+\frac{1}{7z^6}+\cdots\right\},\qquad |z|>1$$

として表わされるが，これをよく知られた級数

$$\frac{1}{2}\log\frac{z+1}{z-1}=\frac{1}{z}+\frac{1}{3z^3}+\frac{1}{5z^5}+\cdots,\qquad |z|>1$$

と比較すれば，これら二つは同じ級数であることがわかる．したがって $Q_0(z)$ は

$$Q_0(z)=\frac{1}{2}\log\frac{z+1}{z-1}$$

のように表現される．つぎに（*3.27*）で $\nu=1$ とおけば $Q_1(z)$ は

$$Q_1(z)=\frac{1}{3z^2}+\frac{1}{5z^4}+\frac{1}{7z^6}+\cdots,\qquad |z|>1$$

となるが，これを上の級数と比較すれば $Q_1(z)$ は

$$Q_1(z)=\frac{z}{2}\log\frac{z+1}{z-1}-1$$

となる．これらの表現を漸化式（*3.38*）に代入すれば

$$Q_2(z)=\frac{1}{2}P_2(z)\log\frac{z+1}{z-1}-\frac{3}{2}z$$

という関係が得られた．こうして整数次の第二種ルジャンドル関数は逐次，求めることができる．

3.2.7 ルジャンドル陪関数　$-1<x<1$, m が正整数のとき

$$P_\nu{}^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^mP_\nu(x)}{dx^m},\quad Q_\nu{}^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^mQ_\nu(x)}{dx^m}\tag{3.43}$$

で定義される関数をルジャンドル陪関数とよぶ．ν の値は整数である必要はない．これらの関数が満足する微分方程式を導くために，ルジャンドルの微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2f}{dx^2}-2x\frac{df}{dx}+\nu(\nu+1)f=0$$

をライプニッツの規則を用いて m 回微分する．簡単のため $v=d^mf/dx^m$ と書けば，方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2v}{dx^2}-2x\frac{dv}{dx}+(\nu-m)(\nu+m+1)v=0$$

が得られる．ここでさらに $w=(1-x^2)^{m/2}v$ とおいて，w に関する微分方程式を求めれば

$$(1-x^2)\frac{d^2w}{dx^2}-2x\frac{dw}{dx}+\left\{\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}w=0\tag{3.44}$$

となって，これが $P_\nu{}^m(x)$, $Q_\nu{}^m(x)$ の満たす方程式である．

この方程式を用いると，整数次のルジャンドル陪関数 $P_n{}^m(x)$ と $P_r{}^m(x)$ の直交性の関係

$$\int_{-1}^{1} P_n{}^m(x)P_r{}^m(x)\,dx = 0, \qquad r \neq n \tag{3.45}$$

を示すことができる．そのために（3.44）で $w = P_n{}^m(x)$ とおいたものに，$P_r{}^m(x)$ を掛け，$w = P_r{}^m(x)$ とおいたものに $P_n{}^m(x)$ を掛けて引算すれば

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\left\{P_r{}^m(x)\frac{dP_n{}^m(x)}{dx} - P_n{}^m(x)\frac{dP_r{}^m(x)}{dx}\right\}\right]$$
$$+[n(n+1)-r(r+1)]P_n{}^m(x)P_r{}^m(x) = 0$$

となり，これを x について積分すれば

$$\left[(1-x^2)\left\{P_r{}^m(x)\frac{dP_n{}^m(x)}{dx} - P_n{}^m(x)\frac{dP_r{}^m(x)}{dx}\right\}\right]_{x=-1}^{x=1}$$
$$= [r(r+1)-n(n+1)]\int_{-1}^{1} P_n{}^m(x)P_r{}^m(x)\,dx$$

となる．$P_r{}^m(x)$, $P_n{}^m(x)$ と微係数は $x = \pm 1$ で有限確定値をもつから，左辺は 0 である．こうして（3.45）が証明された．

整数次でないルジャンドル陪関数 $P_\nu{}^m(x)$ は $\log(1+x)$ という因子を含んでいるので，上の等式の左辺が 0 とならない．このため，直交性の性質は整数次の関数に限られている．また m が整数でないときのルジャンドル陪関数を，整数である場合の拡張として定義することもできるが，応用上重要なのは整数の場合であるので，ここでは省略することにする．

3.2.8　ルジャンドル陪関数の漸化式　　まず漸化式（3.42）を変形して

$$P_{\nu+1}'(z) - P_{\nu-1}'(z) = (2\nu+1)P_\nu(z)$$

としておこう．この関係と（3.43）を用いれば

$$(2\nu+1)xP_\nu{}^m(x) = (2\nu+1)(1-x^2)^{m/2}\left\{\frac{d^m}{dx^m}(xP_\nu) - m\frac{d^{m-1}P_\nu}{dx^{m-1}}\right\}$$
$$= (1-x^2)^{m/2}\left\{(\nu+1)\frac{d^mP_{\nu+1}}{dx^m} + \nu\frac{d^mP_{\nu-1}}{dx^m}\right.$$
$$\left.-m\left[\frac{d^mP_{\nu+1}}{dx^m} - \frac{d^mP_{\nu-1}}{dx^m}\right]\right\}.$$

したがって

$$(\nu-m+1)P_{\nu+1}{}^m(x) + (\nu+m)P_{\nu-1}{}^m(x) = (2\nu+1)xP_\nu{}^m(x) \tag{3.46}$$

という関係が求められた．同じようにしてつぎの漸化式をも導くことができる；

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{1-x^2}\,P_\nu{}^{m+1} &= 2mx\,P_\nu{}^m-(\nu+m)(\nu-m+1)\sqrt{1-x^2}\,P_\nu{}^{m-1}\\ P_{\nu-1} &= xP_\nu{}^m-(\nu-m+1)\sqrt{1-x^2}\,P_\nu{}^{m-1}\\ P_{\nu+1} &= xP_\nu{}^m+(\nu+m)\sqrt{1-x^2}\,P_\nu{}^{m-1}\end{aligned}\right\}\qquad(3.47)$$

漸化式 (3.46) で $\nu=n+1$ とおいたものに $P_n{}^m(x)$ を乗じて積分すれば

$$(n+m+1)\int_{-1}^{1}[P_n{}^m(x)]^2\,dx=(2n+3)\int_{-1}^{1}xP_{n+1}{}^m(x)\,P_n{}^m(x)\,dx$$

となるが，右辺は再び (3.46) を用いて変形すれば

$$(n+m+1)\int_{-1}^{1}[P_n{}^m(x)]^2\,dx=\frac{(2n+3)}{(2n+1)}(n-m+1)\int_{-1}^{1}[P_{n+1}{}^m(x)]^2\,dx$$

という関係を得る．これをくり返し用いると

$$\begin{aligned}(2n+3)\int_{-1}^{1}[P_{n+1}{}^m]^2\,dx &= (2n+1)\cdot\frac{n+m+1}{n-m+1}\int_{-1}^{1}[P_n{}^m]^2\,dx\\ &= \frac{(n+m+1)(n+m)}{(n-m+1)(n-m)}(2n-1)\int_{-1}^{1}[P_{n-1}{}^m]^2\,dx\\ &\vdots\\ &= \frac{(n+m+1)(n+m)\cdots(2m+1)}{(n-m+1)!}(2m+1)\int_{-1}^{1}[P_m{}^m]^2\,dx.\end{aligned}$$

ところが，(3.19) から

$$P_m{}^m(x)=\frac{(2m)!}{2^m\,m!}(1-x^2)^{m/2}$$

であり，したがって上の等式の最後の積分は

$$\int_{-1}^{1}[P_m{}^m]^2\,dx=\frac{[(2m)!]^2}{2^{2m}(m!)^2}\cdot\frac{m!\,\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+3/2)}$$

となる．これを代入すれば

$$(2n+3)\int_{-1}^{1}[P_{n+1}{}^m]^2\,dx=2\,\frac{(n+m+1)!}{(n-m+1)!}$$

となる．これを書き直せばけっきょく

$$\int_{-1}^{1}[P_n{}^m(x)]^2\,dx=\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\qquad(3.48)$$

という公式が得られた．

3.2.9 ルジャンドル多項式の加法定理 二つの点 P, Q の球座標をそれぞれ (r,θ,φ), (r',θ',φ') としよう．原点 O と P, Q を結ぶ 2 直線の交わる角を ω とすれば，ω の余弦は

$$\cos\omega = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi') \tag{3.49}$$

で与えられる．$\cos\omega$ を引数とするルジャンドル多項式を，θ, θ' を引数とするルジャンドル関数を用いて表す公式はルジャンドル多項式の加法定理とよばれ，それは

$$P_n(\cos\omega) = P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta_0) + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n{}^m(\cos\theta)P_n{}^m(\cos\theta')\cos m(\phi-\phi') \tag{3.50}$$

と書くことができる．この定理の証明の方法にはいくつかあるが，その一つは特殊関数のポテンシャル論との関連で考えるのが直観的に理解し易いので証明は第5章で与えることにしよう．

3.2.10　二つのルジャンドル多項式の積　　二つのルジャンドル多項式の積をルジャンドル多項式として表わすことを考える．二つの多項式 $P_l(x), P_m(x)$ の積は明らかに x^{l+m}, x^{l+m-2}, x^{l+m-4}, … を含む多項式であるから

$$u(x) \equiv P_l(x)P_m(x) = a_{l+m}P_{l+m}(x) + a_{l+m-2}P_{l+m-2}(x) + a_{l+m-4}P_{l+m-4}(x) + \cdots$$

と表わすことができる．$l+m$ が偶数か，奇数かによって最後の項は $P_0(x)$ か $P_1(x)$ となる．係数 a_{l+m}, … を求めるために，ルジャンドルの微分方程式を

$$\frac{d}{dx}\left[g\frac{dP_n}{dx}\right] = -n(n+1)P_n, \qquad g \equiv 1-x^2$$

と書いておく．この微分方程式からただちに

$$\frac{d}{dx}\left[g\frac{d^2(gP_n')}{dx^2}\right] = n^2(n+1)^2P_n, \quad \frac{d^2}{dx^2}[gP_n'] = -n(n+1)P_n'$$

という二つの関係が出てくる．一方，$P_l(x)$ と $P_m(x)$ の積 $u(x)$ は微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left[g\frac{du}{dx}\right] + [l(l+1)+m(m+1)]u = 2g\frac{dP_l}{dx}\cdot\frac{dP_m}{dx}$$

を満足することはルジャンドルの微分方程式から容易に示される．これに g を掛けて2回微分すれば

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[g\frac{d(gu')}{dx}\right]+[l(l+1)+m(m+1)]\frac{d^2(gu)}{dx^2}-4l(l+1)m(m+1)u$$

$$=-2g[l(l+1)+m(m+1)]\frac{dP_l}{dx}\cdot\frac{dP_m}{dx}$$

となるから，$gP_m'P_l'$ を消去して変形すれば

$$\frac{d}{dx}\left[g\frac{d^2(gu')}{dx^2}\right]+2[l(l+1)+m(m+1)-1]\frac{d(gu')}{dx}$$

$$+\{[l(l+1)-m(m+1)]^2-2[l(l+1)+m(m+1)]\}u$$

$$=2x[l(l+1)+m(m+1)]\frac{du}{dx}+2x\frac{d^2(gu')}{dx^2}$$

という等式が得られる．最初の u の表現をこれに代入すれば

$$\sum_r a_rN_rP_r(x)+2x\sum a_rL_rP_r'(x)=0.$$

ただし

$$N_r=r^2(r+1)^2-2[l(l+1)+m(m+1)-1]r(r+1)$$

$$+[l(l+1)-m(m+1)]^2-2[l(l+1)+m(m+1)]$$

$$L_r=r(r+1)-[l(l+1)+m(m+1)]$$

であって，r は

$$r=l+m-2s,\quad s=0,1,2,\cdots$$

という値をとる．ここで漸化式 (3.42) を使えば上の等式は

$$\sum_r(a_rN_r+2ra_rL_r)P_r(x)+2\sum_r a_rL_rP_{r-1}'(x)=0$$

となるが，(3.42) をくりかえし用いると

$$P_{r-1}'(x)=(2r-3)P_{r-2}+(2r-7)P_{r-4}+(2r-11)P_{r-6}+\cdots$$

であるから，けっきょく

$$\sum_r(a_rN_r+2ra_rL_r)P_r(x)+2\sum_r a_rL_r\sum_k(2r-4k+1)P_{r-2k}(x)=0$$

となる．ルジャンドル多項式は $(-1,1)$ で互いに直交するから1次独立であり，したがって上の等式が成り立つには各多項式の係数が0とならなければならない；

$$(N_r+2rL_r)a_r+2\sum_k a_{r+2k}L_{r+2k}(2r+1)=0,\quad r=l+m-2s,\ s=0,1,\cdots$$

a_{l+m} は $P_l(x)P_m(x)$ と $P_{l+m}(x)$ の x^{l+m} の係数を比較して定めることができる；

$$a_{l+m}=\frac{(2l)!(2m)![(l+m)!]^2}{(2l+2m)![l!m!]^2}$$

a_{l+m-2s}, $s=1,2,\cdots$ は上の漸化関係から逐次決定することができる．係数 a の具体的な表現を得るために α を

$$\alpha_{2s}=\frac{N_{l+m-2s}+2(l+m-2s)L_{l+m-2s}}{2l+2m-4s+1}$$

で定義すれば，a の漸化関係は

$$a_{l+m-2s}\,\alpha_{2s}+2(a_{l+m}\,L_{l+m}+a_{l+m-2}\,L_{l+m-2}+\cdots a_{l+m-2s+2}\,L_{l+m-2s+2})=0$$

と書ける．ここで s のかわりに $s-1$ とおいたものは

$$a_{l+m-2s+2}\,\alpha_{2s-2}+2(a_{l+m}\,L_{l+m}+a_{l+m-2}+\cdots+a_{l+m-2s+4}\,L_{l+m-2s+4})=0$$

であるから，これを a の漸化関係式に代入すれば

$$a_{l+m-2s}\,\alpha_{2s}-a_{l+m-2s+2}\,\alpha_{2s-2}+2a_{l+m-2s+2}\,L_{l+m-2s+2}=0$$

となる．これはまた

$$\alpha_{2s}\,a_{l+m-2s}=a_{l+m-2s+2}\cdot\beta_{2s-2}$$
$$\beta_{2s}=\alpha_{2s}-2L_{l+m-2s}$$

と書くこともできる．α,β は l,m,s によって定められるから，この関係によって，a_{l+m-2}, $a_{l+m-4}\cdots$ が a_{l+m} を用いて表わされる；

$$P_l(x)P_m(x)=a_{l+m}\left\{P_{l+m}(x)+\frac{\beta_0}{\alpha_2}P_{l+m-2}(x)+\frac{\beta_0}{\alpha_2}\cdot\frac{\beta_2}{\alpha_4}P_{l+m-4}(x)+\cdots\right\} \tag{3.51}$$

この公式を応用して三つのルジャンドル多項式の積の積分

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)P_m(x)P_n(x)\,dx$$

の値を求めることができる．(3.21) と (3.51) から，もし $n>l+m$ であればこの積分は 0 であることは容易にわかる．また $l+m-n$ が奇数であっても 0 となる．そこで

$$n=l+m-2s,\quad s=0,1,2,\cdots$$

とすれば

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)P_m(x)P_n(x)\,dx=a_{l+m}\frac{\beta_0\cdot\beta_2\cdots\beta_{l+m-n-2}}{\alpha_2\cdot\alpha_4\cdots\alpha_{l+m-n}}\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx$$

ところが α,β を計算すると

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{2s} &= \frac{-2s(2l+2m-2s+2)(2l-2s+1)(2m-2s+1)}{2l+2m-4s+1} \\ \beta_{2s} &= \frac{(-2s-1)(2l+2m-2s+1)(2l-2s)(2m-2s)}{2l+2m-4s+1}\end{aligned}\right\} \tag{3.52}$$

となることがわかるから，この表式を上の等式に代入すると

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_m(x)P_n(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{l+m+n+1}\cdot\frac{1\cdot3\cdots(l+m-n-1)}{2\cdot4\cdots(l+m-n)}\cdot\frac{1\cdot3\cdots(l+n-m-1)}{2\cdot4\cdots(l+n-m)}$$

$$\times\frac{1\cdot3\cdots(n+m-l-1)}{2\cdot4\cdots(n+m-l)}\cdot\frac{2\cdot4\cdots(l+m+n)}{1\cdot3\cdots(l+m+n-1)} \tag{3.53}$$

という結果が得られる．これをアダムズ（J.C. Adams）の公式という．

3.2.11 ガウントの公式　前節で求めた積分（*3.53*）に類似の積分

$$\int_{-1}^{1} P_l{}^{v+w}P_m{}^{v}P_n{}^{w}\,dx$$

はガウント（Gaunt）の積分とよばれ，自然科学のいろいろな問題（地磁気のダイナモ理論，気象学，原子・分子構造の理論）に現れる．アダムズの積分はこの特殊な場合である．

この積分を求めるために，つぎの関係が成り立つことに注意する；

$$(1-x^2)^{n/2}P_k{}^u = \sum_{s=0}\frac{(-1)^s(2k-2s-1)!!(2k+2n-4s+1)n!}{(2k+2n-2s+1)!!(n-s)!s!}P_{k+n-2s}^{u+n} \tag{3.54}$$

ただし s の上限は n, $(k-u)/2$ の整数部分，または k のうちの最小のものであり，!! は

$$(2n)!! = 2n(2n-2)\cdots4\cdot2, \qquad 0!! = 1$$

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1, \qquad (-1)!! = 1$$

を示す．この関係を数学的帰納法により証明しよう．n のときに成り立つとして，両辺に $(1-x^2)^{1/2}$ を掛けて，漸化式（*3.46*）と（*3.47*）から得られる関係

$$(1-x^2)^{1/2}P_\nu{}^m(x) = \frac{1}{2\nu+1}\{P_{\nu+1}^{m+1}(x)-P_{\nu-1}^{m+1}(x)\} \tag{3.55}$$

を使えば（*3.54*）は

$$(1-x^2)^{(n+1)/2}P_k{}^u$$
$$=\sum_s \frac{(-1)^s(2k-2s-1)!!n!}{(2k+2n-2s+1)!!(n-s)!s!}\{P^{u+n+1}_{k+n-2s+1}-P^{u+n+1}_{k+n-2s-1}\}$$

となる．$P^{u+n+1}_{k+n-2s-1}$ で s の代りに $s-1$ とおけば，これは

$$(1-x^2)^{(n+1)/2}P_k{}^u$$
$$=\sum_s \frac{(-1)^s(2k-2s-1)!!}{(2k+2n-2s+3)!!}\cdot\frac{(2k-4s+2n+3)(n+1)!}{(n-s+1)!s!}P^{u+n+1}_{k+n-2s+1}$$

と変形されるが，この関係は (3.54) で n の代りに $n+1$ とおいたものである．$n=1$ のときは (3.55) によって明らかに成り立つ．よって証明された．

つぎに (3.54) に P^{u+n}_{k+n-2s} にを掛けて $(-1,1)$ で積分すれば

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{n/2}P_k{}^u P^{u+n}_{k+n-2s}dx$$
$$=2\frac{(-1)^s(2k-2s-1)!!(2n+u+k-2s)!}{(2k+2n-2s+1)!!(k-2s-u)!}\cdot\frac{n!}{s!(n-s)!}$$

を得る．ここで $k=m$, $k+n-2s=l$, $l+m+n=2\sigma$ とおき，$u+n$ のかわりに u, 　u のかわりに v とすれば，この結果は

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{n/2}P_l{}^u P_m{}^v\,dx$$
$$=2(-1)^{\sigma-l}\frac{n!(u+l)!(2\sigma-2n-1)!!}{(l-u)!(\sigma-l)!(\sigma-m)!(2\sigma+1)!!},\quad u=v+n \qquad (3.56)$$

と表わされる．右辺が 0 とならないのは不等式

$$\sigma-l\geq 0,\qquad \sigma-m\geq 0,\qquad \sigma-n\geq 0$$

と

$$l-n-v\geq 0$$

が満足されるときである．最初の不等式は l, m, n が三角形の三辺となっている条件と等価である．これ以外のときには積分 (3.56) は 0 となる．またルジャンドル陪関数の定義から

$$P_n{}^n(x)=\frac{(2n)!}{2^n n!}(1-x^2)^{n/2}$$

である．したがって (3.56) はつぎのように書いてもよい；

$$\int_{-1}^{1} P_n^n P_l^u P_m^v \, dx$$

$$= 2(-1)^{\sigma-1} \frac{(2n)!(u+l)!\sigma!(2\sigma-2n)!}{(l-u)!(\sigma-l)!(\sigma-m)!(\sigma-n)!(2\sigma+1)!},$$

$$u = v+n \qquad (3.57)$$

$$(m+v)!(1-x^2)^{-v/2} \frac{d^{m-v}}{dx^{m-v}}(x^2-1)^m$$

$$= (-1)^v(m-v)!(1-x^2)^{v/2} \frac{d^{m+v}}{dx^{m+v}}(x^2-1)^m, \quad |v| \leq m \quad (3.58)$$

という関係に注意すれば，ガウントの積分は

$$\int_{-1}^{1} P_l^{v+w} P_m^v P_n^w \, dx = \frac{(-1)^{v+w}}{2^{l+m+n} n! l! m!} \cdot \frac{(m+v)!(n+w)!}{(m-v)!(n-w)!} \times$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^{l+v+w}}{dx^{l+v+w}}(x^2-1)^l \frac{d^{m-v}}{dx^{m-v}}(x^2-1)^m \cdot \frac{d^{n-w}}{dx^{n-w}}(x^2-1)^n \, dx$$

となる．$(n-w)$ 回部分積分すれば，これは

$$\frac{(-1)^v}{(2n)!} \frac{(m+v)!(n+w)!}{(m-v)!(n-w)!} \sum_s \frac{(n-w)!}{s!(n-w-s)!} \int_{-1}^{1} P_n^n P_l^{v+w+s} P_m^{n-w-v-s} \, dx$$

に等しい．(*3.57*) と (*3.58*) を使って変形すればけっきょくつぎの結果を得ることになる；

$$\int_{-1}^{1} P_l^{v+w} P_m^v P_n^w \, dx = 2 \frac{(-1)^{\sigma-m+w}(m+v)!(n+w)!\sigma!(2\sigma-2n)!}{(m-v)!(2\sigma+1)!(\sigma-l)!(\sigma-m)!(\sigma-n)!}$$

$$\times \sum_s \frac{(-1)^s(m+n-w-v-s)!(l+v+w+s)!}{s!(n-w-s)!(m-n+w+v+s)!(l-v-w-s)!}, \qquad (3.59)$$

ただし総和は階乗が定義されているすべての s の値についてである．

3.2.12 $n\to\infty$ のときの漸近形　整数次のルジャンドル陪関数 $P_n^m(x)$ を考えよう．$P_n(x)$ は積分表示

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n 2\pi i} \int_c \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+1}} dt$$

で与えられるから，$P_n^m(x)$ はグールサの定理によって

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{(n+m)!}{2^n 2\pi i \, n!} \int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-x)^{n+m+1}} \, dt$$

という積分で与えられることになる．C として中心が x にあり，半径が

$(1-x^2)^{1/2}$ である円をとれば，$t=1$, $t=x$ は C 内にあり，$t=-1$ は C の外にあって，C が満たすべき条件を備えている．そうすれば C 上では

$$t-x=\sqrt{1-x^2}\,e^{i\phi} \qquad 0\leq\phi<2\pi$$

と表わせるから，$P_n{}^m(x)$ はつぎの形をとる；

$$P_n{}^m(x)=\frac{(n+m)!}{2\pi\, n!}\int_0^{2\pi}(x+\sqrt{1-x^2}\,i\sin\varphi)^n\,e^{-im\phi}\,d\phi.$$

被積分関数は φ の周期関数であるので，積分の下限，上限を 0, 2π から，$\pi/2$, $5\pi/2$ にしても積分の値は変わらない．こうしてつぎの表示が得られる；

$$P_n{}^m(x)=\frac{(n+m)!\,e^{-m\pi i/2}}{2\pi\, n!}\int_0^{2\pi}(x+\sqrt{1-x^2}\,i\cos\varphi)^n\,e^{-im\phi}\,d\phi. \quad (3.60)$$

これをラプラス（Laplace）の積分という．$-1\leq x\leq 1$ であるから，$x=\cos\theta$ となる x と θ とは 1 対 1 に対応する．したがってラプラス積分はまた

$$P_n{}^m(\cos\theta)=\frac{(n+m)!\,e^{-m\pi i/2}}{2\pi\, n!}\int_0^{2\pi}(\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi)^n\,e^{-im\phi}\,d\phi \quad (3.61)$$

と表わすこともできる．

(3.61) の積分はまた被積分関数

$$i^{-1}\left[\cos\theta+\frac{i}{2}\sin\theta\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]^n t^{-m-1}$$

を単位円 $t=e^{i\phi}$ に沿って一周積分したものであって，単位円を C で表わせば，それは

$$\frac{1}{i}\int_c e^{n\phi(t)}\,dt, \quad \phi(t)=\log\left[\cos\theta+\frac{i}{2}\sin\theta\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]-\frac{m+1}{n}\log t$$

で与えられる．この積分の $n\to\infty$ のときの漸近形を求めるために鞍点法を応用する．鞍点を求めるために $\phi'(t)$ を計算すれば

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{\dfrac{i}{2}\sin\theta\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)}{\cos\theta+\dfrac{i}{2}\sin\theta\left(t+\dfrac{1}{t}\right)}-\frac{m+1}{n}\frac{1}{t}=0.$$

$m\ll n$ とすれば，$\phi(t)$ は二つの鞍点を $t=\pm1$ もつことがわかる．この鞍点からの積分への寄与を (2.72) を使って計算すれば

$$\frac{1}{i}(\cos\theta+i\sin\theta)^n\left[\frac{-2\pi(\cos\theta+i\sin\theta)}{ni\sin\theta}\right]^{1/2}$$

$$+\frac{1}{i}(\cos\theta-i\sin\theta)^n\left[\frac{2\pi(\cos\theta-i\sin\theta)}{ni\sin\theta}\right]^{1/2} e^{\pi i(m+1)}$$

$$=2\left(\frac{2\pi}{n\sin\theta}\right)^{1/2}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]e^{m\pi i/2}$$

となる．また $m\ll n$ と仮定したから近似的に $(m+n)!\fallingdotseq n!n^m$ である．こうして

$$P_n{}^m(\cos\theta)\sim n^m\left(\frac{2}{n\pi\sin\theta}\right)^{1/2}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right],\quad n\to\infty \tag{3.62}$$

という漸近形が得られる．

演習問題

1. ベクトル演算子 L は

$$L=-i\boldsymbol{x}\times\nabla=\left\{-i\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right),\ -i\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right),\ -i\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\},$$

で定義される．L の成分 (L_x, L_y, L_z) を球座標で表し

$$(L_x+iL_y)P_l{}^m(\cos\theta)e^{im\varphi},\quad (L_x-iL_y)P_l{}^m e^{im\varphi}$$

を求めよ．

2. つぎの関数を直角座標で表せ；

$$r^2P_2{}^2(\cos\theta)\cos 2\varphi,\quad r^2P_2{}^2(\cos\theta)\sin 2\varphi,\quad r^2P_2{}^1(\cos\theta)\sin\varphi.$$

3. n を正整数とするとき

$$\zeta^n=a_0P_0(\zeta)+\cdots+a_nP_n(\zeta)$$

の係数 $a_0, a_1, \cdots a_n$ を求めよ．

4. スターリングの公式を使って

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\Gamma(\nu+m+1)\Gamma(m-\nu)}{(m!)^2}=0$$

を証明せよ．

5. r_0 が与えられており

$$R=(r^2+r_0{}^2-2r\,r_0\cos\theta)^{1/2}$$

とするとき，関数

$$u=e^{ikR}/ikR$$

はヘルムホルツ方程式（第2章問題 4）の解となっていることを示せ．この結果を

用いて，関数 u を

$$\frac{e^{ikR}}{ikR}=\begin{cases}\sum P_n(\cos\theta)\psi_n(kr), & r<r_0\\ \sum P_n(\cos\theta)\phi_n(kr), & r>r_0\end{cases}$$

と展開したとき，ψ_n, ϕ_n の満たす方程式を導き，それらが球ベッセル関数（6.5.1項参照）であることを確めよ．

4章
エルミート関数

4.1 エルミート多項式

4.1.1 エルミートの微分方程式　z-平面上で与えられた方程式

$$\frac{d^2f}{dz^2}-2z\frac{df}{dz}+2\nu f=0 \qquad (\nu\text{: 定数}) \tag{4.1}$$

はエルミート（Hermite）の微分方程式とよばれている．この方程式の解となっている関数は一般にエルミート関数とよばれ，量子力学，数値解析等で重要な役割を果たしている．

f のかわりに

$$g(z)=f(z)e^{-z^2/2}$$

で定義される関数 $g(z)$ を考えると，それは微分方程式

$$\frac{d^2g}{dz^2}+(2\nu+1-z^2)g=0 \tag{4.2}$$

の解となることは容易にわかる．また z のかわりに変数 $t=z^2$ を用いると

$$t\frac{d^2f}{dt^2}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\frac{df}{dt}+\frac{\nu}{2}f=0 \tag{4.3}$$

という形に微分方程式を表すことも可能である．

4.1.2 エルミートの多項式　微分方程式（4.1）で ν が正整数 n に等しい場合を考える．

$$f=\sum_k a_k z^k$$

と仮定して微分方程式に代入し，z のべきの係数を比較すれば

$$a_{k+2}(k+2)(k+1)+a_k(2n-2k)=0 \tag{4.4}$$

が得られる．f は z の n 次多項式であるとすれば，（4.4）から係数 a の間の関係

$$a_{n-2k} = a_n(-1)^k n!/[(n-2k)!2^{2k}k!]$$

が導かれる．ここで $a_n = 2^n$ とおいたものを n 次のエルミート多項式と定義して $H_n(z)$ で表わす；

$$H_n(z) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{(n-2k)!k!}(2z)^{n-2k}, \qquad (4.5)$$

ただし [　] は引数の整数部分を表わす記号である．(4.5) からただちに

$$H_{2n}(0) = (-1)^n(2n)!/n!, \quad H_{2n+1}(0) = 0$$

という二つの関係が得られる．

4.1.3　エルミート多項式の直交性　　二つの異なった正整数 n, m に対応するエルミート多項式を $H_n(z)$, $H_m(z)$ とし，g_1, g_2 を

$$g_1(z) = e^{-z^2/2}H_n(z), \quad g_2(z) = e^{-z^2/2}H_m(z)$$

で与えよう．(4.2) から g_1, g_2 の満足する微分方程式は

$$g_1'' + (2n+1-z^2)g_1 = 0$$
$$g_2'' + (2m+1-z^2)g_2 = 0$$

である．第一の等式に g_2 を掛け，第二の等式に g_1 を掛けて引算すれば

$$\frac{d}{dz}[g_1'g_2 - g_1g_2'] = (m-n)g_1g_2$$

となる．これを $(-\infty, \infty)$ で積分すれば

$$\Big[g_1'(z)g_2(z) - g_1(z)g_2'(z)\Big]_{z=-\infty}^{z=\infty} = (m-n)\int_{-\infty}^{\infty} g_1(z)g_2(z)\,dz.$$

ところが $H_n(z)$, $H_m(z)$ はともに z の多項式であるから，$g_1(z)$, $g_2(z)$ は $z\to\pm\infty$ で 0 となる．したがって

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}H_n(z)H_m(z)\,dz = 0, \qquad n \neq m \qquad (4.6)$$

という関係を得る．云いかえれば関数列 $H_0(z), H_1(z), H_2(z), \cdots$ は重み関数 e^{-z^2} に関して直交関数列を構成している．

4.1.4　エルミート多項式の漸化式　　エルミート多項式はルジャンドル多項式と数似の漸化関係をもっている．まず (4.5) から

$$H_{n+1}(z) + 2nH_{n-1}(z) = (2z)^{n+1} - \sum_{k=0} \frac{(-1)^k(n+1)!}{(n-1-2k)!(k+1)!}(2z)^{n-2k-1}$$
$$+ 2\sum_{k=0} \frac{(-1)^k n!}{(n-1-2k)!\,k!}(2z)^{n-2k-1},$$

ただし総和は階乗の引数が負にならないすべての k についてである．右辺を整理すると

$$H_{n+1}(z)+2nH_{n-1}(z)=2z\left\{(2z)^n-\sum_{k=0}\frac{(-1)^k\,n!}{(n-2-2k)!\,(k+1)!}(2z)^{n-2k-2}\right\}$$

となるが，これは $2zH_n(z)$ である．したがって

$$H_{n+1}+2nH_{n-1}(z)=2zH_n(z) \tag{4.7}$$

という漸化式が得られた．また (4.5) を z について微分すれば

$$H_n'(z)=2n\sum_{k=0}\frac{(-1)^k(n-1)!}{(n-2k-1)!\,k!}(2z)^{n-2k-1}.$$

これは

$$H_n'(z)=2nH_{n-1}(z) \tag{4.8}$$

と書くことができる．

漸化式 (4.8) を用いると定積分 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}H_n^2(z)\,dz$ の値を求めることができる．部分積分によって

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_n^2(z)\,e^{-z^2}\,dz=-\frac{1}{2n+2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}\,H_{n+1}\{2nH_{n-1}-2zH_n\}\,dz$$

となるが，直交性の関係 (4.6) と漸化式 (4.7) から

$$(2n+2)\int_{-\infty}^{+\infty}H_n^2(z)\,e^{-z^2}\,dz=\int_{-\infty}^{+\infty}H_{n+1}^2(z)\,e^{-z^2}\,dz$$

が得られる．これをくり返して用いると

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_n^2(z)\,e^{-z^2}\,dz=2^n n!\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}\,H_0^2(z)\,dz$$

となる．(4.5) から $H_0(z)=1$ であることがわかるので，右辺の積分はラプラスの積分となり，その値は $\sqrt{\pi}$ である．こうして

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_n^2(z)\,e^{-z^2}\,dz=2^n n!\sqrt{\pi},\qquad n=0,1,,\cdots \tag{4.9}$$

という公式が求められた．

4.1.5 エルミート多項式の零点　エルミート多項式 $H_n(z)$ は n 次の多項式である．したがって代数方程式

$$H_n(z)=0$$

は n 個の根をもっている．ここではこれらの根について考察する．この方程

式の根はすべて実根であるということを証明しよう．

その準備としてつぎのことに注目しよう．n が偶数のとき，(4.5) からわかるように最後の項は定数であるが，n が奇数のとき最後の項は z の定数倍である．したがってこのとき $z=0$ は一つの根である．また $H_n(z)$ の偶奇性は n の偶，奇によって定められるから

$$H_n(z)=(-1)^n H_n(-z) \tag{4.10}$$

という関係がなり立つ．さて $H_{n-1}(z)=0$ が $n-1$ 個の実根をもつと仮定して $H_n(z)=0$ が n 個の実根をもつことを証明しよう．$H_{n-1}(z)=0$ の根を大きさの順に $z_1, z_2, \cdots z_{n-1}$ とすれば，漸化式 (4.8) から

$$H_n'(z)=2^{n+1}n(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{n-1})$$

と書ける．さてスツルムの定理 [2.5.2] によって $H_n(z)$ の零点のうち，$n-2$ 個は (z_{n-1}, z_1) の中にある．また上の関係から残りの二つのうち一つは $z>z_1$，他の一つは $z<z_{n-1}$ にあることは明らかである．$H_2(z)=4z^2-2$ であるから，これは $z=\pm 1/\sqrt{2}$ という実数の零点をもっている．こうして数字的帰納法により，$H_n(z)$ の零点はすべて実数であることが示された．これをまとめてつぎの定理が得られる；

定理　n 次のエルミート多項式 $H_n(z)=0$ の n 個の根はすべて実数であって，そのとなり合う二つの根の間に $H_{n-1}(z)=0$ の根が一つ存在する．

4.2　エルミート関数

4.2.1　エルミート関数の定義　　エルミートの微分方程式 (4.1) の級数解を求める．

$$f=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\alpha+k}$$

とおいて，係数 $a_0, a_1, \cdots$ の間の関係を求めると

$$a_0\alpha(\alpha-1)=0$$

$$a_1(\alpha+1)\alpha=0$$

$$a_{k+2}(\alpha+k+2)(\alpha+k+1)=2a_k(\alpha+k-\nu), \qquad k=0,1,2,\cdots$$

が得られる．指数決定式 $\alpha(\alpha-1)=0$ の二根のうち，$\alpha=0$ をとりまた $a_1=0,\ a_0=1$ とおけば一つの級数解

$$f_1(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-2)^k\nu(\nu-2)\cdots(\nu-2k+2)}{(2k)!}z^{2k} \tag{4.11}$$

を得る．同様に $\alpha=1$ とすれば，$a_1=0$ となり，第二の解

$$f_2(z)=z\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-2)^k(\nu-1)(\nu-3)\cdots(\nu-2k+1)}{(2k+1)!}z^{2k}\right\} \tag{4.12}$$

が得られる．$f_1(z)$ と $f_2(z)$ は互いに1次独立であるから，エルミートの微分方程式の一般解はこれらの1次結合として与えられる．ν 次のエルミート関数 $H_\nu(z)$ を

$$H_\nu(z)=\frac{2^\nu\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}f_1(z)+\frac{2^\nu\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}f_2(z) \tag{4.13}$$

で定義しよう．$f_1(z)$, $f_2(z)$ はともに $|z|<\infty$ で一様収束するから，z のすべての値に対して正則な関数，すなわち z の整関数である．したがって $H_\nu(z)$ も z の整関数である．

ν が整数 n $(n=0,1,2,\cdots)$ にひとしいとき，(4.13) の二つの項のうちいずれかは 0 となる．そのとき $H_\nu(z)$ が (4.5) で定義される $H_n(z)$ になることは容易に確めることができる．したがって(4.13)で定義される $H_\nu(z)$ はエルミート多項式の自然な拡張である．

もとの微分方程式 (4.1) で z のかわりに $-z$ としても方程式は不変であるから，$H_\nu(-z)$ も一つの解である．$H_\nu(z)$ と $H_\nu(-z)$ が1次独立であるか否かを調べるために，これら二つの関数のロンスキアンを計算してみよう．エルミートの微分方程式から

$$H_\nu''(z)H_\nu(-z)-H_\nu(z)H_\nu''(-z)=2z\,H_\nu'(z)H_\nu(-z)-2z\,H_\nu(z)H_\nu'(-z).$$

これを積分して

$$H_\nu'(z)H_\nu(-z)-H_\nu(z)H_\nu'(-z)=ce^{z^2}$$

が得られる．積分定数 c の値を定めるには，$z=0$ のときの両辺の値を比較すれば良い．(4.13) から

$$H_\nu(0)=2^\nu\sqrt{\pi}/\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right),\quad H_\nu'(0)=-2^\nu\sqrt{\pi}/\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)$$

であることがわかるから，上の等式で $z=0$ とおけば

$$c=-2^{2\nu+1}\pi\left[\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1}$$

となる．ガンマ関数の倍法公式（*1.24*）によって右辺を計算すれば

$$H_\nu'(z)H_\nu(-z)-H_\nu(z)H_\nu'(-z)=-\frac{2^\nu\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)}e^{z^2} \qquad (4.14)$$

という関係が得られる．したがって $\nu\neq 0,1,2,\cdots$ であれば，$H_\nu(z)$ と $H_\nu(-z)$ は1次独立であって，エルミート微分方程式の基本解となっている．

4.2.2　エルミート微分方程式の基本解　　エルミート関数 $H_\nu(z)$ と $H_\nu(-z)$ のロンスキアンを与える（*4.14*）で ν が 0 または正整数とすれば，右辺は 0 となってこれら二つの関数は1次独立でなくなる．事実（*4.10*）が成り立つからである．したがって ν の値に関係なく互いに1次独立である解関数を求めるにはどうすれば良いであろうか．このために（*4.1*）で

$$f(z)=e^{z^2}h(\zeta),\qquad \zeta=iz$$

とおくと，$h(\zeta)$ は微分方程式

$$\frac{d^2h}{d\zeta^2}-2\zeta\frac{dh}{d\zeta}-(2\nu+2)g=0$$

の解でなければならない．これはエルミート微分方程式で ν のかわりに，$-\nu-1$ とおいたものであるから，この方程式の一つの解は $H_{-\nu-1}(\zeta)$ である．したがって（*4.1*）の二つの解として

$$H_\nu(z),\quad e^{z^2}H_{-\nu-1}(iz) \qquad (4.15)$$

が得られる．これら二つの関数のロンスキアンは ν の値とは無関係に 0 でないことを簡単に示すことができる．

4.3　エルミート関数の漸近形

4.3.1　エルミート関数の積分表示　　ベッセル関数の積分表示を 2.10 節で求めたが，それと類似の方法でエルミート関数の積分表示を求めてみよう．

まず C を適当な積分路として，エルミート関数が積分

$$f(z)=\int_C\phi(t)e^{-zt}\,dt$$

によって表わされるとしよう．これを微分方程式（*4.1*）に代入すれば

$$\int_C (t^2+2zt+2\nu)\phi(t)e^{-zt}\,dt = 0$$

となるが，これはまた

$$\int_C \phi(t)\left[(t^2+2\nu)e^{-zt}-2t\,\frac{d(e^{-zt})}{dt}\right]dt = 0$$

と書くことができる．ところが

$$\int_C t\phi(t)\frac{d}{dt}(e^{-zt})\,dt = \int_C \frac{d}{dt}[t\phi(t)e^{-zt}]\,dt - \int_C t\,\frac{d\phi}{dt}\,e^{-zt}\,dt - \int_C \phi(t)e^{-zt}\,dt$$

となる．したがって積分の上限と下限で $e^{-zt}\,t\phi(t)$ が 0 となるように C をとれば，

$$2t\,\frac{d\phi}{dt}+(t^2+2\nu+2)\phi = 0$$

が得られる．この方程式の解は $\phi(t) = A\cdot\exp(-t^2/4)\cdot t^{-\nu-1}$ である．t のかわりに $2t$ とおけば，けっきょく

$$f(z) = A\int_C e^{-2zt-t^2}\,t^{-\nu-1}\,dt$$

という形の解が得られる．C として図 4.1 に示されたものをとれば，C としての必要な条件を満たしている．A の値を適当にえらぶことによってこの $f(z)$ が $H_\nu(z)$ となるようにしよう．

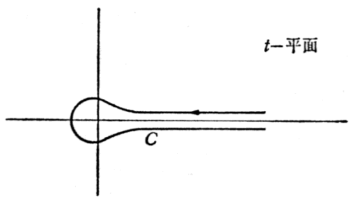


図 4.1 積分路 C

まず $R(\nu) < 0$ と仮定すれば

$$\int_C e^{-t^2}\,t^{-\nu-1}\,dt = e^{-(\nu+1)\pi i}\,i\sin\nu\pi\,\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)$$

であるからつぎの関係がなり立つ；

$$f(0) = Ae^{-(\nu+1)\pi i}\,i\sin\nu\pi\,\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right),\quad f'(0) = Ae^{-\nu\pi i}\,i\sin\nu\pi\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}\right).$$

ここで

$$A = \frac{2^\nu\sqrt{\pi}\;e^{(\nu+)\pi i}}{i\sin\nu\pi\,\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}\right)} = \frac{e^{(\nu+1)\pi i}}{2i\sin\nu\pi\,\Gamma(-\nu)}$$

ととれば $f'(0) = H_\nu(0)$, $f'(0) = H_\nu'(0)$ となっている．$f(z)$ は $H_\nu(z)$ と

同じ2階微分方程式の解であるから，$f(z)$ と $H_\nu(z)$ は同一の関数であると決論できる．こうしてつぎの積分表示が得られる；

$$H_\nu(z)=\frac{e^{(\nu+1)\pi i}}{2i\sin\nu\pi\,\Gamma(-\nu)}\int_C e^{-t^2-2zt}\,t^{-\nu-1}\,dt. \tag{4.16}$$

この表示は $R(\nu)<0$ と仮定して得られたが，右辺の積分は ν の値にかかわらず存在し，他方 (4.13) で定義される $H_\nu(z)$ は ν の値にかかわらず ν の正則な関数である．したがって解析接続によって上の積分表示は ν の値に関係なく成立する．

4.3.2　エルミート関数の漸近形　　エルミート関数の漸近形を求めるためにまず

$$z=re^{i\theta}\qquad -\pi/2<\theta<\pi/2$$

と仮定し，積分表示 (4.16) で $2zt=s$ とおく．そうすれば

$$\int_C e^{-t^2-2zt}\,t^{-\nu-1}\,dt=(2z)^\nu\int_D e^{-s}\,e^{-(s/2z)^2}\,s^{-\nu-1}\,ds$$

となる．ここで D は図 4.2 に示された積分路である．いまダルブーの公式 (2.74) で $f(y)=\exp(-y)$, $a=0$, $h=(s/2z)^2$ とすれば

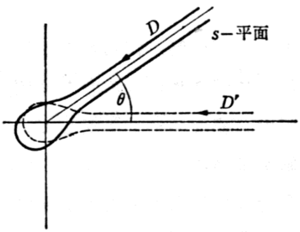


図 4.2　積分路の変形

$$e^{-(s/2z)^2}=1+\sum_{m=1}^{N}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{s}{2z}\right)+\frac{(-1)^N}{(N-1)!}\left(\frac{s}{2z}\right)^{2N}\times\int_0^1(1-t)^{N-1}\,e^{-t(s/2z)^2}\,dt$$

という関係が得られる．したがって

$$\int_D e^{-s-(s/2z)^2}\,s^{-\nu-1}\,ds=\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(-1)^m}{(2z)^{2m}\,m!}\int_D e^{-s}\,s^{2m-\nu-1}\,ds+R_N,$$

$$R_N=\frac{(-1)^N}{(N-1)!\,(2z)^{2N}}\int_D ds\,s^{2N-\nu-1}\,e^{-s}\int_0^1(1-t)^{N-1}\,e^{-t(s/2z)^2}\,dt.$$

ところが e^{-s} は，s の偏角が $\pi/2$ と $-\pi/2$ の間にあれば，$|s|\to\infty$ のとき指数関数的に減少するから

$$\int_D e^{-s}\, s^{2m-\nu-1}\, ds = \int_{D'} e^{-s}\, s^{2m-\nu-1}\, ds = -e^{-\nu\pi i}\, 2i \sin\nu\pi\, \Gamma(2m-\nu)$$

となる．これらの表式を (4.16) に代入すれば

$$H_\nu(z) = \frac{(2z)^\nu}{\Gamma(-\nu)} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(-1)^m\, \Gamma(2m-\nu)}{m!\,(2z)^{2m}} + \frac{e^{(\nu+1)\pi i}\, R_N}{2i \sin\nu\pi\, \Gamma(-\nu)} (2z)^\nu$$

という表現が得られる．

つぎに R_N に表われる積分が z には無関係に有限であることを示そう．まず $\boldsymbol{R}(\nu) < 0$ と仮定して，積分路 D を直線 $s = |s| e^{i\theta}$ $(0 \leq |s| < \infty)$ に無限に近づければ

$$\int_0^1 (1-t)^{N-1}\, e^{-t(s/2z)^2}\, dt = \int_0^1 (1-t)^{N-1}\, e^{-t(|s|/2|z|)^2}\, dt \leq \frac{1}{N}.$$

したがって

$$|R_N| \leq \frac{2|\Gamma(2N-\nu)|}{N!\,|2z|^{2N}}$$

となる．こうして $H_\nu(z)$ の漸近形が得られる；

$$H_\nu(z) = (2z)^\nu \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(-1)^m\, \Gamma(2m-\nu)}{m!\,\Gamma(-\nu)\,(2z)^{2m}} + O(|z|^{2\nu-2N}). \qquad (4.17)$$

この関係は $\boldsymbol{R}(\nu) < 0$, z の偏角の絶対値が $\pi/2$ より小であるという条件のもとで得られた．しかし漸化式 (4.7) は一般の ν の値に対しても成り立つことを示すことができるので，それをくり返し用いて，すべての ν の値に対して (4.17) がなり立つことを確めることができる．また積分表示 (4.16) で積分路 C を正の実数軸から $\pi/4$ だけ正，負の方向に回転しても積分は収束する．そうすれば z の偏角に対する制限もゆるめることができて，漸近展開 (4.17) は，z の偏角の絶対値が $3\pi/4$ より小さいときにも成り立つ．これ以外の z の偏角の値に対する漸近展開を求めるには別の方法によらねばならない．

エルミート微分方程式の解関数は $H_\nu(z)$, $H_\nu(-z)$, $e^{z^2} H_{-\nu-1}(iz)$, $e^{z^2} H_{-\nu-1}(-iz)$ であるが，もともとの微分方程式は2階であるから，これら四つのうち二つを残りの二つで表わすことが可能なはずである．それで A, B を定数として

$$H_\nu(z) = A e^{z^2} H_{-\nu-1}(iz) + B e^{z^2} H_{-\nu-1}(-iz)$$

とおき，A, B を決定することにする．$z=0$ とおけば

$$H_\nu(0)=(A+B)H_{-\nu-1}(0)$$

となる．z について微分して $z=0$ とおけば

$$H_\nu'(0)=iA\,H_{-\nu-1}'(0)-iB\,H_{-\nu-1}'(0).$$

これらの関係式を A, B について解き，$H_{-\nu-1}(0)$, $H_{-\nu-1}'(0)$ の値を代入すれば

$$A=2^{2\nu}\left\{\frac{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}\right)}-i\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}\right\},\quad B=2^{2\nu}\left\{i\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}+\frac{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}\right)}\right\}$$

を得る．ガンマ関数の倍法公式を使って整理すれば

$$H_\nu(z)=-\frac{2^\nu\sqrt{\pi}\,e^{\nu\pi i/2}}{\Gamma(-\nu)\sin\nu\pi}e^{z^2}H_{-\nu-1}(iz)-\frac{2^\nu\sqrt{\pi}\,e^{-\nu\pi i/2}}{\Gamma(-\nu)\sin\nu\pi}e^{z^2}H_{-\nu-1}(-iz) \tag{4.18}$$

という関係が得られる．ここで z の代りに $-z$ とおけばこの等式は

$$H_\nu(-z)=-\frac{2^\nu\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)\sin\nu\pi}e^{z^2}\{H_{-\nu-1}(iz)e^{-\nu\pi i/2}+H_{-\nu-1}(-iz)e^{\nu\pi i/2}\}$$

となる．これから $H_{-\nu-1}(-iz)$ を消去すれば

$$H_\nu(-z)=e^{\nu\pi i}H_\nu(z)+\frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)}e^{z^2+(\nu+1)\pi i/2}H_{-\nu-1}(iz) \tag{4.19}$$

となる．したがって偏角の絶対値が $3\pi/2$ より大であるときの漸近形は，(4.17) と (4.19) を用いて求めることができる．

4.4　エルミート多項式による展開

4.4.1　展開係数　　$(-\infty,\infty)$ で与えられた関数 $f(x)$ をエルミート多項式で展開することを考える．エルミート多項式は $(-\infty,\ \infty)$ で互いに直交し（重み関数 e^{-x^2} に関して），またノルムは (4.9) で与えられる．したがって

$$f(x)=a_0H_0(x)+a_1H_1(x)+\cdots \tag{4.20}$$

と展開することが可能であれば，係数は

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, 2^n n!} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) H_n(x) e^{-x^2}\, dx \tag{4.21}$$

によって定められる．

4.4.2 与えられた関数の多項式近似　関数 $f(x)$ が $(-\infty, \infty)$ で与えられているかわりに，有限個の点

$$x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$$

でのみ $f(x)$ の値が知られているときには，係数を (*4.21*) によって求めることはできない．このとき $f(x)$ を多項式によって近似することを考えよう．いま乗積

$$O_i(x) \equiv \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_{n+1})}$$

を考えると，これは $x = x_k\ (x_k \neq x_i)$ では 0 となり，$x = x_i$ では 1 となる．したがって

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) O_i(x) \tag{4.22}$$

は n 次の多項式で，しかも $P(x_i) = f(x_i)$ となっている．

とくに $x_k\ (k = 1, 2, \cdots n+1)$ が

$$H_{n+1}(x) = 0$$

の根である場合には

$$O_i(x) = \frac{H_{n+1}(x)}{(x-x_i)H_{n+1}'(x_i)} = \frac{H_{n+1}(x)}{2(n+1)(x-x_i)H_n(x_i)}$$

であるから，(*4.22*) は

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \frac{H_{n+1}(x)}{(2n+2)(x-x_i)H_n(x_i)} \tag{4.23}$$

となる．これが与えられた関数 $f(x)$ のエルミート多項式による近似である．

4.4.3 クリストッフェル・ダルブーの定理　(*4.23*) を使って $P(x)$ の微分・積分をする場合に便利な公式がある．それを導くためにはつぎの定理を必要とする．

定理　エルミート多項式に対してクリストッフェル・ダルブー (Christoffel·Darboux) の公式が成り立つ；

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{H_k(x)H_k(y)}{2^k k!}=\frac{H_n(y)H_{n+1}(x)-H_n(x)H_{n+1}(y)}{2^{n+1}n!(x-y)}. \qquad (4.24)$$

［証明］ 数学的帰納法によって証明する．$n=0$ のとき右辺は

$$\frac{2x-2y}{2(x-y)}=1$$

となって，これは左辺に等しい．また $n=m$ のとき (4.24) が成り立つとすれば

$$\sum_{k=0}^{m+1}\frac{H_k(x)H_k(y)}{2^k k!}=\frac{H_m(y)H_{m+1}(x)-H_m(x)H_{m+1}(y)}{2^{m+1}m!(x-y)}+\frac{H_{m+1}(x)H_{m+1}(y)}{2^{m+1}(m+1)!}$$

を得る．漸化式を使って右辺を計算すれば，それは

$$\frac{H_{m+2}(x)H_{m+1}(y)-H_{m+1}(x)H_{m+2}(y)}{2^{m+2}(m+1)!(x-y)}$$

となり，これは (4.24) の右辺で $n=m+1$ としたものである．

さて (4.24) で y が $H_{n+1}(x)=0$ の一根 x_i に等しいときには

$$\frac{H_n(x_i)H_{n+1}(x)}{2^{n+1}n!(x-x_i)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{H_k(x)H_k(x_i)}{2^k k!} \qquad (4.25)$$

が成り立つから

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\frac{H_{n+1}(x)}{x-x_i}dx=\frac{2^{n+1}n!\sqrt{\pi}}{H_n(x_i)}$$

という関係が得られる．これを (4.23) に用いると

$$\int_{-\infty}^{+\infty}P(x)e^{-x^2}dx=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{2^n n!\sqrt{\pi}}{n+1}\cdot\frac{f(x_i)}{H_n^2(x_i)} \qquad (4.26)$$

という結果を得る．これは $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-x^2}dx$ の近似値を与える公式であって，数値積分に応用される．

演 習 問 題

1. エルミート多項式に対する漸化式を用いて $H_5(z)$ まで求め，それらの零点を計算せよ．

2. エルミート関数の級数表示または積分表示を用いて，漸化式

$$H_{\nu+1}(z)+2\nu H_{\nu-1}(z)=2zH_\nu(z), \quad H_\nu'(z)=2\nu H_{\nu-1}(z)$$

が ν の値にかかわらず成り立つことを示せ．

3. 調和振動子に対するシュレディンガーの方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{1}{2}Kx^2u=Eu, \qquad -\infty < x < +\infty,\ h=2\pi\hbar$$

である．ただし u は波動関数，h はプランクの定数，m は振動子の質量，K はバネ定数である．u が有界であるためには，エネルギー E は離散的な値しかとれないことを示せ．

4. つぎの定積分の値を計算せよ：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(z)H_m(z)ze^{-z^2}\,dz, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(z)H_m(z)z^2e^{-z^2}\,dz.$$

5. もし $R(\nu)<0$ であればエルミート関数は

$$H_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma(-\nu)}\int_0^\infty e^{-t^2-2tz}\,t^{-\nu-1}\,dt$$

で与えられることを示し，とくに

$$H_{-1}(z)=e^{z^2}\int_z^\infty e^{-t^2}\,dt$$

であることを確めよ．また正整数 n に対して

$$H_{-n-1}(z)=\frac{(-1)^n}{2^n\,n!}\frac{d^n}{dz^n}\left(e^{z^2}\int_z^\infty e^{-t^2}\,dt\right)$$

となることを示せ．

6. 二つの関数 $H_\nu(z)$ と $e^{z^2}H_{-\nu-1}(iz)$ のロンスキアンを計算せよ．

7. (*4.18*) の右辺の関数に問題5の積分表示を用いることにより

$$H_\nu(z)=\frac{2^{\nu+1}\,e^{z^2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,t^\nu\cos\left(2zt-\frac{\nu\pi}{2}\right), \quad R(\nu)<-1$$

というエルミート関数の積分表示が得られることを示せ．またこの関数はエルミート微分方程式を満足することを確めよ．

8. ルジャンドル多項式に対して，クリストッフェル・ダルブーの公式

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(x)P_k(y)=\frac{n+1}{x-y}\{P_{n+1}(x)P_n(y)-P_n(x)P_{n+1}(y)\}$$

が成り立つことを証明せよ．

9. 上の結果を用いて，$(-1,1)$ で与えられた関数 $f(x)$ の定積分

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$$

の近似値を与える公式を求めよ．［ヒント：(*4.26*) に類似の積分公式を導くことを考えよ．］

5 章
ポテンシャル論への応用

5.1 ポテンシャル論

5.1.1 ポテンシャル ポテンシャル論への特殊関数の応用を議論する前に，まずポテンシャルの概念を説明しておこう．

3 次元ユークリッド空間内に，質点 P（質量 M_{P}）と質点 Q（質量 M_{Q}）があるとき，これらの間に働く引力 $\boldsymbol{F}$ は大きさが $GM_{\mathrm{P}}M_{\mathrm{Q}}\overline{\mathrm{PQ}}^{-2}$ であって，2 質点 PQ を結ぶ方向を向いている，ただし G は重力定数である．とくに質点 P に働く力を $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$ で表わせば

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}} = -GM_{\mathrm{P}}M_{\mathrm{Q}}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} \tag{5.1}$$

と書ける．ここに $\boldsymbol{x}=(x, y, z)$ は P の位置ベクトル，$\boldsymbol{x}'$ は Q の位置ベクトルであり，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$ は PQ 間の距離

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| = \{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{1/2}$$

である．等式 (5.1) の右辺はまたつぎのように表わすことができる；

$$-GM_{\mathrm{P}}M_{\mathrm{Q}}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} = M_{\mathrm{P}}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{GM_{\mathrm{Q}}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \quad \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}'.$$

したがって，位置の関数 $V(\boldsymbol{x})$ を

$$V = -\frac{GM_{\mathrm{Q}}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{5.2}$$

で定義すれば，P に作用している力は

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}} = -M_{\mathrm{P}}\cdot\mathrm{grad}\,V = -M_{\mathrm{P}}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)V \tag{5.3}$$

で与えられることになる．質点 Q は何らかの拘束によって空間内に固定されているとすれば，V は (x, y, z) のみの関数と見なすことができる．V の

ことを質点 Q によるポテンシャル関数とよんでいる．関数 V のもつ物理的意味はつぎのようなものである．

ある力 $\boldsymbol{F}$ が作用しているもとで，質点が微小距離 $\delta\boldsymbol{x}=(\delta x, \delta y, \delta z)$ だけ変位したとき，力 $\boldsymbol{F}$ はその質点に仕事 $\delta W=F_x\,\delta x+F_y\,\delta y+F_z\,\delta z$ をしたという，ここに (F_x, F_y, F_z) はベクトル $\boldsymbol{F}$ の成分である．この定義に従えば，質点が $\boldsymbol{x}_1$ から $\boldsymbol{x}_2$ まで動いたときに力 $\boldsymbol{F}$ のなした仕事は

$$\int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2}\{F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz\}$$

である．この積分は一般には $\boldsymbol{x}_1$ から $\boldsymbol{x}_2$ へ質点が動く径路に依存する．しかし $F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz$ が全微分となっているとき，云い換えれば，F_x, F_y, F_z の間に

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x},\quad \frac{\partial F_z}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial z},\quad \frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial y} \tag{5.4}$$

という三つの関係があるとき，仕事は径路とは無関係に定まり

$$\int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2}\{F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz\} = W(\boldsymbol{x}_2)-W(\boldsymbol{x}_1)$$

となるような関数 W が存在する．$\boldsymbol{x}_2$ は任意であるから，$\boldsymbol{x}_2$ と $\boldsymbol{x}_1$ の差が 1 次の微小量

$$\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1=(\delta x,\ \delta y,\ \delta z)$$

とすれば，W と $\boldsymbol{F}$ の間に

$$F_x=\frac{\partial W}{\partial x},\quad F_y=\frac{\partial W}{\partial y},\quad F_z=\frac{\partial W}{\partial z} \tag{5.5}$$

という関係が存在することが容易に示される．

さて質点 Q が P に及ぼす力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$ は (5.3) で与えられるから，条件 (5.4) を満足している．したがって P を $\boldsymbol{x}_1$ から $\boldsymbol{x}_2$ に変位させるときに $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$ のなす仕事は径路には無関係に定まる．(5.3) と (5.5) を比較すると，その変位においてなされる仕事は

$$W(\boldsymbol{x}_2)-W(\boldsymbol{x}_1)=M_{\mathrm{P}}\{V(\boldsymbol{x}_1)-V(\boldsymbol{x}_2)\}$$

であることがわかる．云い換えれば，二つの点 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ におけるポテンシャルの差は単位質量をもつ質点を，$\boldsymbol{x}_1$ から $\boldsymbol{x}_2$ へ移すときに力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$ のなす仕事に等しいのである．

二つの点 P, Q が質量 M_P, M_Q をもつかわりに，電荷 e, e' をもつとすれば，PQ の間に働く力はクーロンの法則に従って $ee'/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2$ であって，e と e' が同符号であれば斥力，異符号であれば引力となる．それゆえ，電荷 e に作用する力 $\boldsymbol{F}_P$ は

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F}_P &= ee'\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} = -e\,\mathrm{grad}\,\frac{e'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = -e\,\mathrm{grad}\,V \\ V &= \frac{e'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

と表わすことができる．このように P, Q の間に働く力がニュートン引力，クーロンの引力（または斥力）のどちらであっても，作用する力は同一の形のポテンシャルから導かれ，両者の差は比例定数が異なるだけである．

さて 2 個以上の点 P, Q_1, Q_2, … があってこれらの間に重力または電気力が働いているとき，P に働く力は Q_1 の P に及ぼす力，Q_2 の P に及ぼす力，…をベクトル的に加えると得られることが実験によって確められている．したがって Q_1, Q_2, … によるポテンシャルは，個々のポテンシャルを加え合わせると得られる．一般に Q_1, Q_2, … は連続的に分布している．このとき，ポテンシャルを質量，または電荷の分布が与えられたときに求めるのがポテンシャル論に課された問題である．ポテンシャルを求めるには二つの方法がある．一つは上に述べたように，個々の質点（または電荷）によるポテンシャルを加える（連続的分布の場合は積分）方法であり，他のものはポテンシャル関数 V の満足する偏微分方程式を導いて，与えられた境界条件のもとで解く方法である．第一の方法は極く簡単な問題を除いては有効でないので，以下では主として第二の方法について説明することにする．

5.1.2 ラプラスとポアッソンの方程式　3 次元空間のある有限部分 Ω 内に物質（または電荷）が分布しているとする．Ω 内の 1 点 $\boldsymbol{x}_0$ にある微小な体積要素 $d\tau_0 = dx_0\,dy_0\,dz_0$ は質量 $\rho(\boldsymbol{x}_0)\,d\tau_0$ をもっているとする．$\rho(\boldsymbol{x}_0)$ は積分可能であると仮定する．この質量による点 P(x, y, z)（必ずしも Ω の内部の点とは限らない）におけるポテンシャルの値は，定義 (5.2) によって $-G\rho(\boldsymbol{x}_0)d\tau_0/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|$ である．したがって Ω 内にあるすべての物質によるポテンシャル V の P での値は

$$V(\boldsymbol{x}) = -G\iiint_\Omega \frac{\rho(\boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}d\tau_0 \tag{5.7}$$

で与えられる．

つぎにポテンシャル関数 $V(\boldsymbol{x})$ の満足する偏微分方程式を導こう．まず (5.7) から

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -G\iiint_\Omega \rho(\boldsymbol{x}_0)\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\right]\right\}d\tau_0 \quad y, z \text{ についても同様} \tag{5.8}$$

という等式が導かれる．ここで 3.1.1 項で得た結果

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\right] = -\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^3}+\frac{3(x-x_0)^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^5} \tag{5.9}$$

に注意する．もし $\boldsymbol{x}$ が Ω の外部の点であれば，右辺は有限で定まった値をもつ．これを x, y, z に関して加え合わせると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\right] = 0$$

となる．したがって (5.8) から

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{5.10}$$

というラプラスの方程式が成り立つ．さてラプラスの演算子 $\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$ は今後しばしば現われるので，これを簡単に ∇^2 で表わすことにしよう；

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

そうすれば (5.10) はかんたんに

$$\nabla^2 V = 0$$

と書くことができる．

つぎに $\mathrm{P}(x, y, z)$ が Ω の内部にあるときを考える．Ω の内部の点 $\mathrm{P}'(x', y', z')$ を中心とする半径 ε の球をとり，それを E で表わそう．そして

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| < \varepsilon$$

と仮定する．$V(\boldsymbol{x})$ は E 内の物質分布と，それより外にある物質分布によるものとの和である；

$$V(\boldsymbol{x}) = V_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x})+V_{\Omega-\mathrm{E}}(\boldsymbol{x}).$$

ところが P(x,y,z) は $\Omega-\mathrm{E}$ の外にあるから，すでに得た結果によって

$$\nabla^2 V_{\Omega-\mathrm{E}}(\boldsymbol{x})=0$$

が成り立つ．$V_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x})$ を求めるためにそれを二つの部分に分けて

$$V_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x})=-G\left\{\int_{\mathrm{E}}\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\,d\tau_0+\int_{\mathrm{E}}\frac{\rho(\boldsymbol{x}_0)-\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\,d\tau_0\right\}\equiv V_1(\boldsymbol{x})+V_2(\boldsymbol{x})$$

と表わそう．第一項は密度 $\rho(\boldsymbol{x}')$ である一様な球によるポテンシャルであり，第二項は密度分布が $\rho(\boldsymbol{x}_0)-\rho(\boldsymbol{x}')$ である球によるポテンシャルである．密度 $\rho(\boldsymbol{x})$ が位置の連続関数であれば，ε を小さくすることによって第二項を第一項に比べていくらでも小さくすることができる．したがって $V_1(\boldsymbol{x})$ についてのみ考えれば十分である．$V_1(\boldsymbol{x})$ を求めるために

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|=r,\quad |\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}'|=r_0$$

とおき，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$ と $\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}'$ のなす角度を θ で表わせばそれは

$$V_1(\boldsymbol{x})=-G\rho(\boldsymbol{x}')2\pi\int_0^{\varepsilon}r_0^2\,dr_0\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\cdot d\theta}{(r^2+r_0^2-2rr_0\cos\theta)^{1/2}}$$

となる．ところが

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\cdot d\theta}{(r^2+r_0^2-2rr_0\cos\theta)^{1/2}}=\frac{1}{rr_0}\Big[(r^2+r_0^2-2rr_0\cos\theta)^{1/2}\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

$$=\begin{cases}2/r, & r\geq r_0\\ 2/r^0, & r\leq r_0\end{cases}$$

であるから，上の積分はただちに計算できて

$$V_1(\boldsymbol{x})=-2\pi G\rho(\boldsymbol{x}')\left[\varepsilon^2-\frac{1}{3}r^2\right]$$

となる．したがって

$$\nabla^2 V_1(\boldsymbol{x})=4\pi G\rho(\boldsymbol{x}')$$

を得る．$\varepsilon\to 0$ の極限では $\rho(\boldsymbol{x}')$ は $\rho(\boldsymbol{x})$ に近づくからけっきょく

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=4\pi G\rho(\boldsymbol{x}) \tag{5.11}$$

という結果を得る．これはポアッソン（Poisson）の方程式とよばれる．

ここでは重力（万有引力）を例にとって，ポテンシャル関数の方程式を導いたが，すでに述べたように電荷の間に作用する力も，重力と同じように扱えるので，電気ポテンシャル（電位）も全く同様の偏微分方程式を満足するこ

とがわかる．このとき異なるのは $G\rho$ が電荷の分布密度で置き換えられるだけである．したがってこれら二つの場合を同じように扱うには，$G=1$ とおいた方程式

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=4\pi\rho \tag{5.12}$$

を扱えば十分である．以下では (5.12) をポアッソンの方程式とよぶこととする．

さて空間の有限部分でのみ物質分布 $\rho(\boldsymbol{x})$ が 0 でなければ，それによるポテンシャルは無限遠方で 0 とならなければならない．またポテンシャルの物理的意味から，それは位置の連続関数でなければならない．これら二つの条件がポテンシャルを一意的に定めるのに十分である．またポアッソンの方程式に対しては重ね合せの原理が成り立つ．すなわち $\rho_1(\boldsymbol{x})$, $\rho_2(\boldsymbol{x})$ を別々の関数としたとき

$$\nabla^2 V_1=4\pi\rho_1, \quad \nabla^2 V_2=4\pi\rho_2$$

であれば，$V_1(\boldsymbol{x})+V_2(\boldsymbol{x})$ は物質分布 $\rho(\boldsymbol{x})=\rho_1(\boldsymbol{x})+\rho_2(\boldsymbol{x})$ であるときの，ポアッソン方程式の解となっている．したがって

$$\nabla^2 V_1=4\pi\rho(\boldsymbol{x})$$

であり，$V_2(\boldsymbol{x})$ がラプラス方程式の解であれば A を任意定数として，$V_1(\boldsymbol{x})+AV_2(\boldsymbol{x})$ もまたポアッソン方程式の解となっている．

他方，電荷分布によるポテンシャルの計算にはつぎの注意が必要である．空間内に導電性物体があれば，その上でポテンシャルは一定値をとる．例えば点電荷のそばに金属板があれば，それによって金属板上に電荷分布がひき起こされて，そこではポテンシャルは一定値となる．このときポテンシャルは金属板上で一定となるようなラプラス方程式の解で，しかも点電荷の近傍では，その挙動が点電荷によるものに近づくようなものである．

5.2　球座標を用いて表わされるポテンシャル

5.2.1　ラプラス方程式の一般解　　ポテンシャル関数 $V(\boldsymbol{x})$ の満たす方程式はすでにみちびいたように，ポアッソンの方程式であって，ラプラスの方程式はその特殊な場合 $(\rho=0)$ である．ここではラプラス方程式の一般解を求

めよう．この一般解と，ポアッソン方程式の特殊解とを適当に用いることによって，与えられた境界条件を満足するポテンシャルを求めることができる．

球座標 (r, θ, φ) を用いたとき，ラプラスの方程式は (3.12) で与えられる；

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\cot\theta\cdot\frac{\partial V}{\partial \theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right)=0. \quad (5.13)$$

この方程式の解を求めるために，変数分離の方法を用いることにする．R, Θ, Φ はそれぞれ r, θ, φ のみの関数であるとして

$$V(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \quad (5.14)$$

とおいて (5.13) に代入し整理すれば

$$\frac{r^2}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Theta}\left(\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\cot\theta\cdot\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=0$$

となる．第一項は r のみの関数，第二項と第三項の和は θ, φ のみの関数であって，それらの和が0であるから，第一項と，第二，第三項の和はそれぞれ定数でなければならない．こうして上の方程式は

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{A}{r^2}R=0,\ \frac{\sin^2\theta}{\Theta}\left(\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+A\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$$

のように分離される．ここに A は分離の定数である．第二の関係式について考えれば，左辺は θ のみの関数，右辺は φ のみの関数であるから，それぞれは定数でなければならない．分離の定数を便宜上 m^2 とおけば

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{d\Theta}{d\theta}+A\Theta-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta=0 \quad (5.15)$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+m^2\Phi=0 \quad (5.16)$$

となる．Φ が満たす方程式から Φ を容易に求めることはできて，それは

$$\Phi=\gamma\cdot\cos m\varphi+\delta\cdot\sin m\varphi$$

で与えられる，ここに γ, δ は任意の定数である．

さてポテンシャル $V(r,\theta,\varphi)$ は位置の連続関数でなければならない．したがって，V の $\varphi=0$ における値と，$\varphi=2\pi$ における値とは同一でなければならない．m が整数でなければこの条件は満たされないから，整数値の m のみが許されることになる．

つぎに方程式 (5.15) で

$$A=\nu(\nu+1), \qquad \cos\theta=x, \qquad |x|\leq 1$$

とおいたものは (3.44) と同じになることがわかる．したがって方程式 (5.15) の一般解は $P_\nu{}^m(\cos\theta)$ と $Q_\nu{}^m(\cos\theta)$ の1次結合として与えられる．ポテンシャル関数 V は θ の有界な連続関数でなければならない．ところがすでに見たように，一般の ν の値に対して，$P_\nu(x)$ は $\log(1+x)$ という項を含んでいる．また $P_\nu{}^m(x)$ は

$$P_\nu{}^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^mP_\nu(x)}{dx^m}$$

によって定義されているから，$P_\nu{}^m(x)$ は $(1+x)^{-m/2}$ $(m=1,2,\cdots)$ か，$\log(1+x)(m=0)$ という項をもつことになり，$x=-1$ で無限大となる．ところが ν が整数 n に等しいとき，$P_n(x)$ は x の多項式であるから，このような特異点は現われない．他方 $Q_\nu{}^m(x)$ について考えると，ν の値が何であっても $x=\pm 1$ において特異点をもつから，これは除外される．こうしてポテンシャル関数の満足すべき条件を満たすのは，整数次のルジャンドル関数 $P_n{}^m(x)$ のみであり，(5.15) で許される A の値は n を整数として

$$A=n(n+1)$$

であることが結論される．

この結果を r のみの関数 R が満たす方程式に代入すれば

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{n(n+1)}{r^2}R=0$$

となる．この微分方程式の二つの独立な解が

$$R=r^n, \quad R=r^{-n-1}$$

であることは容易にたしかめることができる．こうしてラプラス方程式の一つの特殊解は，$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ を定数として

$$[\alpha r^n+\beta r^{-n-1}]P_n{}^m(\cos\theta)[\gamma\cdot\cos m\varphi+\delta\cdot\sin m\varphi], \begin{cases} n=0,1,2,\cdots \\ m=0,1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{5.17}$$

で与えられることになる．(5.17)で与えられる解のそれぞれはラプラス方程式を満足し，またラプラス方程式は線形方程式であるから，それらの1次結

合はまたラプラス方程式を満足する．したがって一般解は (*5.17*) の1次結合で与えられる．

5.2.2 円環のポテンシャル　半径が a, 質量が M である円環を考え，その環に一様に物質（または電荷）が分布しているとしよう．この環の中心を原点にとり，環の平面を (x, y) 平面，それに垂直に z 軸をとる．点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ におけるポテンシャルは (*5.7*) によって

$$V(\boldsymbol{x}) = -\int \frac{\sigma\, ds_0}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}$$

で与えられる，ここに σ は物質の線密度，ds_0 は環の微小部分である．図5.1のように角 φ_0 をとれば，明らかに

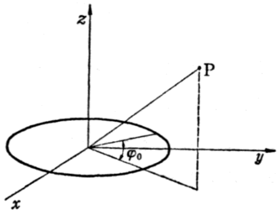


図 5.1　円環と点 P との相対関係

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2 = x^2+y^2+a^2-2a\sqrt{x^2+y^2}\cos\varphi_0+z^2 = R^2+a^2+z^2-2aR\cos\varphi_0.$$

ただし

$$R^2 = x^2+y^2$$

となる．したがってポテンシャルは

$$V(\boldsymbol{x}) = -\sigma a\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi_0}{\sqrt{R^2+a^2z^2-2aR\cos\varphi_0}}$$

という定積分で与えられることになる．この積分の値を求めるために

$$p^2 = (R+a)^2+z^2, \quad q^2 = (R-a)^2+z^2$$

とおけば

$$R^2+a^2+z^2-2aR\cos\varphi_0 = \frac{p^2+q^2}{2}-\frac{p^2-q^2}{2}\cos\varphi_0 = p^2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}+q^2\cos^2\frac{\varphi_0}{2}$$

となるから，ポテンシャルは

$$V = -2\sigma a\int_0^{\pi}\frac{d\varphi_0}{\sqrt{p^2\sin^2\dfrac{\varphi_0}{2}+q^2\cos^2\dfrac{\varphi_0}{2}}}$$

で与えられる．この積分の値は一般の p, q の値に対しては初等関数を用いて表現することはできない（楕円積分となる）．しかし $R=0$, すなわち z 軸上の値は容易に求めることができる；

$$V_{R=0} = -\frac{2\pi\sigma a}{\sqrt{a^2+z^2}} = -\frac{M}{\sqrt{a^2+z^2}}. \tag{5.18}$$

これを級数に展開すれば

$$\left.\begin{aligned} V_{R=0} &= -\frac{M}{a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{z}{a}\right)^{2n}, \qquad z<a \\ &= -\frac{M}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{a}{z}\right)^{2n}, \qquad z<a \end{aligned}\right\}. \tag{5.19}$$

他方ポテンシャル (5.18) はラプラスの方程式を満足するから，それは極座標で表わせば (5.17) の重ね合せとなっているはずである．円環は軸対称であるから，それのポテンシャルは φ には依存しない．それゆえ α_n, β_n を定係数として

$$V = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n r^n + \beta_n r^{-n-1})P_n(\cos\theta) \tag{5.20}$$

の形に書くことができる．これと (5.18) を比較するために z 軸上の値 $(\theta=0)$ を求めると，$r=z$, $P_n(1)=1$ に注意して

$$V_{\theta=0} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha_n z^n + \frac{\beta_n}{z}z^{-n}\right)$$

となる．これが (5.19) と一致するためには

$$\alpha_{2n} = -\frac{M}{a^{2n+1}}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad a_{2n+1}=0, \quad \beta_n = 0, \qquad z<a$$

$$\alpha_n = 0, \quad \beta_{2n} = -Ma^{2n}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad \beta_{2n+1}=0, \qquad z>a$$

でなければならない．ゆえに一般の (r, θ) の値に対してポテンシャルは次の公式で与えられる；

$$V = -\frac{M}{a}\cdot\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 P_2(\cos\theta)+\frac{3}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^4 P_4(\cos\theta)-\frac{5}{16}\left(\frac{r}{a}\right)^6 P_6(\cos\theta) + \cdots\right\}, \qquad r<a,$$

$$V = -\frac{M}{r}\cdot\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\cos\theta)+\frac{3}{8}\left(\frac{a}{r}\right)^4 P_4(\cos\theta)-\frac{5}{16}\left(\frac{a}{r}\right)^6 P_6(\cos\theta) + \cdots\right\}, \qquad r>a. \tag{5.21}$$

5.2.3　薄い円板のポテンシャル　半径 a，面密度 σ の薄い円板を考える．

円板によるポテンシャルは半径の異なった円環のポテンシャルを加え合わせたものであるから，円板に垂直でその中心を通る z 軸上でのポテンシャルの値は (5.18) から

$$V = -\int_0^a \frac{2\pi\sigma\, a\, da}{\sqrt{a^2+z^2}} = -2\pi\sigma[\sqrt{a^2+z^2}-z], \qquad z>0$$

となる．これを z のべき級数に展開すれば

$$V = -2\pi\sigma z \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\left(\frac{a}{z}\right)^{2n}, \qquad z>a$$

となる．ところが前と同様，円板の上を除いてはポテンシャルは (5.20) で与えられるから，そこで $\theta=0$ とおいたものと，上の表式とは同一でなければならない．したがって，定数 $\alpha_n=0$, β_n は

$$\beta_{2n-2} = (-1)^n\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}a^{2n}-2\pi\sigma, \quad \beta_{2n-1}=0$$

によって与えられ，ポテンシャルは

$$V(r,\theta) = -\frac{2\pi\sigma\, a^2}{r}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\cos\theta)+\frac{1}{16}\left(\frac{a}{r}\right)^4 P_4(\cos\theta)\right.$$
$$\left.-\frac{5}{128}\left(\frac{a}{r}\right)^6 P_6(\cos\theta)+\cdots\right\}, \qquad r>a \qquad (5.22)$$

によって与えられる．$r<a$ に対しても同じよう計算すれば公式

$$V(r,\theta) = -2\pi\sigma\, a\left\{1-\frac{r}{a}P_1(\cos\theta)+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 P_2(\cos\theta)-\frac{1}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^4 P_4(\cos\theta)\right.$$
$$\left.+\frac{3}{48}\left(\frac{r}{a}\right)^6 P_6(\cos\theta)-\cdots\right\}, \qquad r<a \qquad (5.23)$$

が得られる．

いままでは $z>0$ と仮定してポテンシャルを計算したが，$r>a$ であれば θ が 0 から π まで変化したとき，円板をよぎらないから，(5.22) は θ の値に関係なく成立する．ところが $r<a$ のとき，$\theta=\pi/2$ のとき円板をよぎるから，$z>0$ $(0<\theta<\pi/2)$ という仮定のもとで得た結果 (5.23) は $z<0$ ではそのまま成り立たない．しかしポテンシャルは $\theta=\pi/2$ に関して対称であるから

$$V(r,\theta) = V(r,\ \pi-\theta)$$

という関係によって，$\pi/2<\theta<\pi$ に対する $V(r,\theta)$ の値を求めることができる．

5.2.4　薄い球殻のポテンシャル　半径 a の薄い球殻の上に物質（または電荷）が分布しているとき，ポテンシャルを求めることを考えよう．球座標 (r,θ,φ) を用いると，球殻以外の点ではポテンシャルは（5.17）の重ね合せとして表わすことができる．ところが $r<a$ のとき，もし一つでも 0 でない β があればポテンシャルと，それの勾配として得られる力は無限大となってしまう．球殻から有限距離はなれた点でポテンシャルが特異点をもつことは許されないから，明らかに $\beta=0$ である．したがってポテンシャルは

$$V_2=\sum_{n,m=0} r^n P_n{}^m(\cos\theta)(\gamma_{n,m}\cos m\varphi+\delta_{n,m}\sin m\varphi),\qquad r<a$$

と表わし得る，ここに $\gamma,\ \delta$ ともに定数である．

つぎに $r>a$ について考えると，ポテンシャルは $r\to\infty$ である有限な一定値に収束しなければならないから，すべての α は 0 でなければならない．したがって

$$V_1=\sum_{n,m=0} r^{-n-1} P_n{}^m(\cos\theta)(\gamma_{n,m}'\cos m\varphi+\delta_{n,m}'\sin m\varphi),\qquad r>a$$

となる，ここに $\gamma',\ \delta'$ はともに定数である．

さて球殻の上での物質の面密度を $\sigma(\theta,\varphi)$ で表わし，それは (θ,φ) の連続で有界変動な関数であると仮定しよう．$\sigma(\theta,\varphi)$ を展開して

$$\sigma(\theta,\varphi)=\sum_{n,m} P_n{}^m(\cos\theta)\{(C_{n,m}\cos m\varphi+D_{n,m}\sin m\varphi\}\qquad(5.24)$$

と表現すれば，展開の係数 $C_{n,m},\ D_{n,m}$ はつぎのように求めることができる．まず三角関数の直交性の関係

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos m\varphi\cos m'\varphi\,d\varphi&=\begin{cases}0, & m\neq m'\\ \pi, & m=m'\neq 0\\ 2\pi, & m=m'=0\end{cases}\\ \int_0^{2\pi}\sin m\varphi\sin m'\varphi\,d\varphi&=\begin{cases}0, & m\neq m'\\ \pi, & m=m'\end{cases}\end{aligned}\right\}\qquad(5.25)$$

を用いると

$$\left.\begin{aligned} C_{n,m}P_n^m(\cos\theta) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sigma(\theta,\varphi)\cos m\varphi\, d\varphi, \\ D_{n,m}P_n^m(\cos\theta) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sigma(\theta,\varphi)\sin m\varphi\, d\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad m=0,1,2,\cdots$$

という関係が得られる，ただし $m=0$ のとき分母の π は 2π で置き換えられる．さらにルジャンドル陪関数 $P_n^m(\cos\theta)$ の直交性の関係(3.45), (3.48)を用いれば，展開係数は

$$\left.\begin{aligned} C_{n,m} &= \frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\,\sigma(\theta,\varphi)\cos m\varphi\sin\theta \\ D_{n,m} &= \frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\,\sigma(\theta,\varphi)\sin m\varphi\sin\theta \end{aligned}\right\}, \qquad n,m=0,1,2,\cdots$$

で与えられることになる．ここで $m=0$ のとき，分母の 2π は 4π で置き換えるものとする．こうして $\sigma(\theta,\varphi)$ が与えられれば係数 $C_{n,m}$, $D_{n,m}$ は一意的に定まるから，それらは既に与えられたものと見なすことができる．

さてラプラス方程式の解 $V_1(r,\theta,\varphi)$ と $V_2(r,\theta,\varphi)$ を関係づけるには次の定理が必要である．

ガウスの定理　閉曲面 S によって囲まれた領域 V 内で，x, y, z の関数である u, v, w が連続な微係数 $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial y$, $\partial w/\partial z$ をもつとき

$$\iiint_V\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \iint_S(lu+mv+nw)dS \qquad (5.26)$$

が成立する，ここに (l, m, n) は曲面の微小要素 dS の外向き法線の方向余弦である．

ある曲面上に物質が分布していて，その面密度が σ であるとする．物質密度 σ とポテンシャルの間の関係を求めるために，ガウスの定理を応用しよう．ガウスの定理(5.26)で

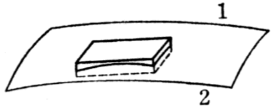


図 5.2　曲面 S を囲む薄い直方体

$$(u,v,w) = \left(\frac{\partial V}{\partial x},\ \frac{\partial V}{\partial y},\ \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

とおけば，ポアッソンの方程式から

$$\iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = 4\pi \iiint_V \rho\, dx\,dy\,dz$$

が得られる．Vとして物質の分布している曲面を含む小さな薄い直方体にとり，無限に薄くした極限ではこれは $4\pi\sigma\times$直方体に含まれる曲面の面積となる．また同じ極限で（5.26）の右辺は

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial n}-\frac{\partial V_2}{\partial n}\right)\times\text{直方体に含まれる曲面の面積}$$

となる，ここに　V_1, V_2　は曲面の両側におけるポテンシャルの値であり，$\partial/\partial n$ は法線方向（2 から1の向きを正とする）の微分を示す．したがって曲面上に分布している物質の面密度が σ であるとき

$$\frac{\partial V_1}{\partial n}-\frac{\partial V_2}{\partial n}=4\pi\sigma \tag{5.27}$$

が成り立つ．

(5.27)を用いると球殻の外と内とのポテンシャルの値を関係づけることができる．n として球殻の外向き法線にとれば

$$\begin{aligned}&-\sum(n+1)r^{-n-2}P_n{}^m(\cos\theta)(\gamma_{n,m}{}'\cos m\varphi+\delta_{n,m}{}'\sin m\varphi)\\&\quad-\sum nr^{n-1}P_n{}^m(\cos\theta)(\gamma_{n,m}\cos m\varphi+\delta_{n,m}\sin m\varphi)\\&=4\pi\sum P_n{}^m(\cos\theta)(C_{n,m}\cos m\varphi+D_{n,m}\sin m\varphi),\qquad r=a\end{aligned}$$

という関係が得られる．関数系 $P_n{}^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ $P_n{}^m(\cos\theta)\sin m\varphi$ はともに直交関数系であるから，互いに1次独立である．それゆえ上の関係が成り立つための必要十分条件はこれらの関数の係数が両辺で等しいことである；

$$\begin{aligned}(n+1)a^{-n-2}\,\gamma_{n,m}{}'+na^{n-1}\,\gamma_{n,m}&=-4\pi\,C_{n,m},\\(n+1)a^{-n-2}\,\delta_{n,m}{}'+na^{n-1}\,\delta_{n,m}&=-4\pi\,D_{n,m}.\end{aligned}$$

またポテンシャルは位置の連続関数でなければならないから

$$\begin{aligned}a^{-n-1}\,\gamma_{n,m}{}'&=a^n\,\gamma_{n,m}\\a^{-n-1}\,\delta_{n,m}{}'&=a^n\,\gamma_{n,m}{}'\end{aligned}$$

という関係が得られる．これら四つの関係式から $\gamma,\gamma',\delta,\delta'$ を求めると

$$\begin{aligned}(2n+1)\gamma_{n,m}&=-4\pi a^{1-n}\,C_{n,m},\quad &(2n+1)\delta_{n,m}&=-4\pi a^{1-n}\,D_{n,m},\\(2n+1)\gamma_{n,m}{}'&=-4\pi a^{n+2}\,C_{n,m},\quad &(2n+1)\delta_{n,m}{}'&=-4\pi a^{n+2}\,D_{n,m}\end{aligned}$$

となる．ゆえにポテンシャルは

$$V_1 = -4\pi a \sum_{n,m} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n{}^m(\cos\theta)(C_{n,m}\cos m\varphi + D_{n,m}\sin m\varphi),\quad r>a \qquad (5.28)$$

$$V_2 = -4\pi a \sum_{n,m} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{n} P_n{}^m(\cos\theta)(C_{n,m}\cos m\varphi + D_{n,m}\sin m\varphi),\quad r<a \qquad (5.29)$$

で与えられる.

5.2.5 ルジャンドル多項式の加法定理　ラプラスの方程式

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

の解で，変数 x, y, z の n 次の同次多項式を一般に体球関数とよんでいる．n 次の体球関数は v を定係数として

$$V = \sum_{a,b,c} v_{abc}\, x^a y^b z^c, \qquad a+b+c=n \qquad (5.30)$$

と表わすことができる．この体球関数を球座標 (3.3) を使って表わせば

$$V = r^n f_n(\theta,\varphi) \qquad (5.31)$$

となり，$f_n(\theta,\varphi)$ が θ については $\cos\theta$, $\sin\theta$ の n 次（同次）多項式となることは明らかである．n 次の体球関数を (5.31) の形に表わしたとき，$f_n(\theta,\varphi)$ を n 次の球面調和関数とよんでいる．n 次の球面調和関数の満たす微分方程式はラプラス方程式を球座標を用いて表わした (5.13) からただちに導くことができる．(5.31) をラプラス方程式に代入して，r を消去すればそれは

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial\theta^2} + \cot\theta\cdot\frac{\partial f_n}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f_n}{\partial\varphi^2} + n(n+1)f_n = 0 \qquad (5.32)$$

となる．m 次の球面調和関数を $f_m(\theta,\varphi)$ とすれば，それは (5.32) で n のかわりに m とおいた方程式を満足するから，それら二つの等式から

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\left(f_m\frac{\partial f_n}{\partial\theta} - f_n\frac{\partial f_m}{\partial\theta}\right)\right] + \frac{1}{\sin\theta}\left[f_n\frac{\partial^2 f_m}{\partial\varphi^2} - f_m\frac{\partial^2 f_n}{\partial\varphi^2}\right]$$
$$= [m(m+1)-(n+1)]f_m f_n \sin\theta$$

という関係が得られる．両辺を θ について 0 から π まで積分すれば，第一項は 0 となるから

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sin\theta}\left[f_n\cdot\frac{\partial^2 f_m}{\partial\varphi^2}-f_m\frac{\partial^2 f_n}{\partial\varphi^2}\right]=[m(m+1)-n(n+1)]\int_0^\pi f_m\cdot f_n\sin\theta\cdot d\theta$$

を得る．左辺を φ について 0 から 2π まで積分するが，そのとき積分順序の変更をすれば

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi\frac{d\theta}{\sin\theta}\left[f_n\cdot\frac{\partial^2 f_m}{\partial\varphi^2}-f_m\frac{\partial^2 f_n}{\partial\varphi^2}\right]$$
$$=\int_0^\pi\frac{d\theta}{\sin\theta}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[f_n\frac{\partial f_m}{\partial\varphi}-f_m\frac{\partial f_n}{\partial\varphi}\right]d\varphi$$

となる．ところが V は x, y, z の一価関数であるから，球面調和関数の $\varphi=0$ と $\varphi=2\pi$ における値は等しく，したがってこの積分の値は 0 である．こうして

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi f_m(\theta,\varphi)f_n(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta=0,\qquad m\neq n \tag{5.33}$$

という関係が成り立つ，云い換えれば次数の異なる球面調和関数は球面上で直交している．

n 次の球面調和関数は θ については $\cos\theta$, $\sin\theta$ の n 次の同次多項式である．ところがルジャンドル陪関数の定義式 (3.43) で $x=\cos\theta$ とおけば

$$P_n{}^m(\cos\theta)=\frac{(-1)^m}{2^n\,n!}\sin^m\theta\frac{d^{n+m}}{(\sin\theta\cdot d\theta)^{n+m}}[\sin^{2n}\theta],\qquad m=0,1,\cdots n$$

となって，$P_n{}^m(\cos\theta)$ もまた $\cos\theta$, $\sin\theta$ の n 次の同次多項式であることがわかる．したがって n 次の球面調和関数 $f_n(\theta,\varphi)$ は

$$f_n(\theta,\varphi)=\sum_{m=0}^n(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)P_n{}^m(\cos\theta) \tag{5.34}$$

と表わすことができる．f_n とは別の n 次の球面調和関数を

$$g_n(\theta,\varphi)=\sum_{m=0}^n(C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi)P_n{}^m(\cos\theta)$$

と表わして，$f_n\cdot g_n$ を球面上で積分しよう．$\sin m\varphi$, $\cos m\varphi$ の直交関係 (5.25) と，$P_n{}^m(\cos\theta)$ の直交関係 (3.45), (3.48) を用いれば

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi f_n(\theta,\varphi)g_n(\theta,\varphi)\sin\theta\cdot d\theta$$
$$=\frac{4\pi}{2n+1}\left\{A_0C_0+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^n\frac{(n+m)!}{(n-m)!}[A_mC_m+B_mD_m]\right\} \tag{5.35}$$

という関係を容易に得ることができる.

さてある定まった方向を (θ', φ') とする. それが (θ, φ) で決められる方向となす角度を ω とすれば, ω は

$$\cos\omega = \cos\theta\cdot\cos\theta' + \sin\theta\cdot\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$$

によって与えられる. いま $f_n(\theta, \varphi)$ を n 次の球面調和関数として, 積分

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f_n(\theta, \varphi) P_n(\cos\omega)\sin\theta\, d\theta$$

を考える. この積分は球面全体について行うから, 球面上の座標 (θ, φ) の極をどのようにとっても積分値は不変である. そこで極が (θ', φ') となるようにとれば, 点 (θ, φ) の新座標は (ω, ψ) となる. $f_n(\theta, \varphi)$ を (ω, ψ) で表わしたものを $\bar{f}_n(\omega, \psi)$ とすれば, 考えている積分は

$$I = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \bar{f}_n(\omega, \psi) P_n(\cos\omega)\sin\omega\, d\omega$$

となる. $\bar{f}_n(\omega, \psi)$ は n 次の球面調和関数であるから, (5.34) によって

$$\bar{f}_n(\omega, \psi) = A_0 P_n(\cos\omega) + \sum_{m=1}^{n} (A_m\cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) P_n(\cos\omega)$$

と展開できる. $P_n{}^m(x)$ の定義から, $P_n{}^m(1) = 0$ $(m \geq 1)$ となることがわかる. それで上の展開で $\cos\omega = 1$ とおけば

$$A_0 P_n(1) = A_0 = \bar{f}_n(\omega = 0, \psi) = f_n(\theta', \varphi')$$

となって, A の値が定められる. $\bar{f}_n(\omega, \psi)$ の展開式を積分に代入すれば

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f_n(\theta, \varphi) P_n(\cos\omega)\sin\theta\cdot d\theta = \frac{4\pi}{2n+1} f_n(\theta', \varphi') \quad (5.36)$$

という結果が得られる. また $P_n(\cos\omega)$ は (θ', φ') を固定して (θ, φ) の関数と見なせば, n 次の球面調和関数であるから

$$P_n(\cos\omega) = \sum_{m=0}^{n} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) P_n{}^m(\cos\theta)$$

と展開できて, 係数 A, B は (θ', φ') の関数となっている. 係数 A_m は (3.45), (3.48), (5.25) を用いると計算することができて

$$\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!} A_m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} P_n{}^m(\cos\theta)\cos m\varphi P_n(\cos\omega)\sin\theta\, d\theta$$

によって定まる, ただし $m=0$ のとき 2π は 4π となる. 右辺に現われる

$P_n(\cos\theta)\cos m\varphi$ は n 次の球面調和関数であるから，積分の値は (5.36) によって求めることができる；

$$\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!}A_m=\frac{4\pi}{2n+1}P_n{}^m(\cos\theta')\cos m\varphi',$$

$$\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!}B_m=\frac{4\pi}{2n+1}P_n{}^m(\cos\theta')\sin m\varphi'.$$

これらの値を $P_n(\cos\omega)$ の展開式に代入すると

$$\left.\begin{aligned}&P_n(\cos\omega)=P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta')\\&\quad+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n{}^m(\cos\theta)P_n{}^m(\cos\theta')\cos m(\varphi-\varphi')\\&\cos\omega=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')\end{aligned}\right\}\qquad(5.37)$$

という結果が得られる．この関係は球関数の加法定理とよばれるもので，ルジャンドル関数のもっとも重要な性質の一つである．

5.2.6　球面上の正規直交関数系　　関数系 $P_n{}^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$（ただし，$i^2=-1$）を考えると，$n\neq n'$, $m\neq m'$ であれば (3.45) を用いて

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}P^{|m|}(\cos\theta)P_{n'}{}^{|m'|}(\cos\theta)e^{i(m-m')\varphi}\sin\theta\,d\theta=0$$

となることは容易にわかる．いいかえれば関数系 $P_n{}^{|m|}(\cos\theta)\,e^{im\varphi}(n=0,1,2,\cdots,\ m=n,\ n-1,\ n-2,\cdots,\ -n)$ は球面上で直交関数系をつくっている．しかしノルム（$n=n'$, $m=m'$ であるときの積分の値）は 1 とはなっていない．ノルムが 1 である直交関数系は正規化されている，あるいは正規直交関数系とよばれる．球面上での正規直交関数系は $P_n{}^{|m|}(\cos\theta)^{im\varphi}$ に適当な正規化因子を掛けると得られる．

$$Y_n{}^m(\theta,\varphi)=\left[\frac{2n+1}{4\pi}\cdot\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}\right]^{1/2}P_n{}^{|m|}(\cos\theta)\,e^{im\varphi},$$
$$m=n,n-1,\cdots,-n.\qquad(5.38)$$

このように定義された $Y_n{}^m(\theta,\varphi)$ は明らかに球面上で正規直交関数系となっている．

5.2.7　マッカラの公式　　任意の形をもった物体のポテンシャルを近似的に与える公式を導こう．その物体の重心を座標の原点にとる．原点Oからの位置ベクトルが $\boldsymbol{x}$ である点 P でのポテンシャルは (5.7) によって与えられる；

$$V(\boldsymbol{x})=-\int_\Omega\frac{\rho(\boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}d\tau_0$$

考えている点 P は物体の外にあるとする．そうすれば $|\boldsymbol{x}|>|\boldsymbol{x}_0|$ である．ω をベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}_0$ の間の角とし，$|\boldsymbol{x}|=r$, $|\boldsymbol{x}_0|=r_0$ と書けば

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2=r^2+r_0{}^2-2rr_0\cos\omega$$

であるからポテンシャルはまた

$$V(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{r}\int_\Omega\frac{\rho(\boldsymbol{x}_0)d\tau_0}{\left[1-2\dfrac{r_0}{r}\cos\omega+\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^2\right]^{1/2}}$$

で与えられる．$r>r_0$ であることに注意して被積分関数を (*3.5*) を使って展開すれば

$$V=-\frac{1}{r}\int_\Omega\rho(\boldsymbol{x}_0)\left\{1+\mathrm{P}_1(\cos\omega)\frac{r_0}{r}+\mathrm{P}_2(\cos\omega)\left(\frac{r_0}{r}\right)^2+\cdots\right\}d\tau_0$$

となる，ここに … は (r_0/r) の高次の項を示す．第一項を積分すれば全質量 M となる．つぎに $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$, $\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$ とすれば

$$\frac{r_0}{r}\mathrm{P}_1(\cos\omega)=\frac{r_0}{r}\cdot\frac{(xx_0+yy_0+zz_0)}{rr_0}$$

であるから展開の第二項は

$$\int_\Omega\rho(\boldsymbol{x}^0)\frac{r_0}{r}\mathrm{P}_1(\cos\omega)d\tau_0=\frac{1}{r^2}\int_\Omega\rho(\boldsymbol{x}_0)(xx_0+yy_0+zz_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0$$

となるが，座標原点は物体の重心にとってあるからこの積分は 0 となる．第三項については，まず

$$\mathrm{P}_2(\cos\omega)=\frac{3}{2}\cos^2\omega-\frac{1}{2}$$

に注意すれば

$$\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\mathrm{P}_2(\cos\omega)=\frac{3}{2r^4}(x^2x_0{}^2+y^2y_0{}^2+z^2z_0{}^2)$$

$$+\frac{3}{r^4}(xy\,x_0y_0+xz\,x_0z_0+yz\,y_0z_0+xz\,x_0z_0)-\frac{1}{2}\frac{r_0{}^2}{r^2}$$

である．これの第二項に $\rho(x_0)$ を掛けて積分したものは 0 となる．また

$$A=\int_\Omega (y_0{}^2+z_0{}^2)\rho(\boldsymbol{x}_0)d\tau_0,\quad B=\int_\Omega (x_0{}^2+z_0{}^2)\rho(\boldsymbol{x}_0)d\tau_0,$$

$$C=\int_\Omega (x_0{}^2+y_0{}^2)\rho(\boldsymbol{x}_0)d\tau_0$$

とすれば，A, B, C は x, y, z 軸のまわりの慣性能率である．このように A, B, C を定義すると第三項の積分は

$$\int_\Omega \rho(\boldsymbol{x}_0)r_0{}^2\,d\tau_0=\frac{1}{2}(A+B+C)$$

と表わすことができる．また

$$\int \rho x_0{}^2\,d\tau_0=\frac{B+C-A}{2},\quad \int \rho y_0{}^2\,d\tau_0=\frac{A+C-B}{2},\quad \int \rho z_0{}^2\,d\tau_0=\frac{A+B-C}{2}$$

であることに注意すれば，第一項を積分したものは

$$\int_\Omega \rho(\boldsymbol{x}_0)(x^2x_0{}^2+y^2y_0{}^2+z^2z_0{}^2)d\tau_0=\frac{A+B+C}{2}r^2-Ax^2-By^2-Cz^2$$

となる．したがって

$$\int_\Omega P(x)\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\mathrm{P}_2(\cos\omega)d\tau_0=\frac{A+B+C}{2r^2}-\frac{3(Ax^2+By^2+Cz^2)}{2r^4}$$

という結果を得る．いま x, y, z 軸を考えている物体の主慣性軸にとれば，$(x/r,\ y/r,\ z/r)$ は考えている点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ と重心 O を結ぶ直線の，主慣性軸に関する方向余弦となっている．力学でよく知られているように，主慣性軸との方向余弦が (l, m, n) である直線のまわりの慣性能率 I は

$$I=Al^2+Bm^2+Cn^2$$

で与えられる．したがって上の等式の右辺の第二項は $-3I/2r^2$ である．これらの結果をまとめると

$$V=-\frac{M}{r}-\frac{A+B+C-3I}{2r^3}+\cdots \tag{5.39}$$

というマッカラ（MacCullagh）の公式を得ることになる．ここに M は物体の質量，A, B, C は主慣性能率，I は O と考えている点を結ぶ直線に関する慣性能率である．

地球はほぼ球形であるが，自転による遠心力のために赤道付近でふくらんでいる．それゆえ地球の主慣性軸の一つは自転軸であり，他の二つは地球の

中心を通り赤道と交る互いに直交する2直線で，それらに関する慣性能率は等しい．それらを A とし，自転軸（z 軸）に関する能率を C としよう．考えている点の球座標を (r, θ, φ) とすれば，マッカラの公式を使えば

$$V = -\frac{M}{r} - \frac{1}{2r^3}[2A+C-3(C\cos^2\theta + A\sin^2\theta)] + \cdots$$

$$= -\frac{M}{r} + (C-A)\frac{P_2(\cos\theta)}{r^3} + \cdots$$

とポテンシャルは書ける．第一項は地球が完全な球であったとしたときのポテンシャルであり，第二項は地球が偏平になっているための効果を表わしている．係数の正確な値は人工衛星の軌道の解析によって求めることができる．

5.3 円柱座標で表現されるポテンシャル

5.3.1 薄い円板のポテンシャル　円柱座標を用いて取り扱えるポテンシャル論の問題は限られているので，ここでは代表的な例として薄い円板上に物質（電荷）が分布している時のポテンシャルだけを考えることにする．

直角座標 (x, y, z) と

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z, \qquad r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi \qquad (5.41)$$

によって関係づけられている座標 (r, θ, z) を円柱座標という．この座標を使ってポアッソンの方程式を表わすと

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4\pi\rho \qquad (5.41)$$

となることは良く知られている．薄い円板を $z=0$ の平面にとれば，$z \neq 0$ ではラプラスの方程式が成り立つ．その解を変数分離の方法によって得るため

$$V = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$$

とおけば，ラプラス方程式は

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

となる．最初の二項は (r, θ) のみの関数，第三項は z のみの関数であるから両方とも定数でなければならない．分離の定数を α^2 とすれば

$$\frac{d^2Z}{d^2z}=\alpha^2 Z,\ \ \alpha>0;\quad \frac{r^2}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right)+\alpha^2r^2=-\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}$$

となる．第二の方程式の各辺もまた定数でなければならないから，それを n^2 とすれば

$$\Theta=A\cos n\theta+B\sin n\theta$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(\alpha^2-\frac{n^2}{r^2}\right)R=0 \tag{5.42}$$

という二つの関係に分解される．Θ の $\theta=0$, 2π における値は等しくなければならないから，整数値の n だけが許される．つぎに $Z(z)$ について考えると，上の方程式は二つの独立解 $e^{\alpha z}$, $e^{-\alpha z}$ をもつが，$z\to+\infty$ のとき $e^{\alpha z}$ は無限大となるので，ポテンシャルとしては許されない．また $z\to-\infty$ のとき $e^{-\alpha z}$ は同じ振舞をする．したがって $|z|\to\infty$ のとき有限値に収束する解は

$$Z=e^{-\alpha|z|}$$

である．最後に方程式 (5.42) について見れば，$z=\alpha r$ とすればそれがベッセルの微分方程式 (2.5) になることはただちにわかる．したがって (5.42) の二つの独立解は $J_n(\alpha r)$ と $Y_n(\alpha r)$ である．しかし $Y_n(\alpha r)$ は $r=0$ で特異点をもつから不適当である．こうしてラプラス方程式の一つの解として

$$J_n(\alpha r)e^{-\alpha|z|}(A\cos n\theta+B\sin n\theta)$$

が得られた．α と n は任意であるから，ラプラス方程式の一般解は，異なった n, α の値をもつ解を重ね合わせて得られる．したがってそれは

$$V(r,\theta,z)=\sum_n\int_0^\infty J_n(\alpha r)e^{-\alpha|z|}[A_n(\alpha)\cos n\theta+B_n(\alpha)\sin n\theta]\,d\alpha \tag{5.43}$$

のように書ける．

つぎに面密度 $\sigma(r,\theta)$ を θ についてはフーリェ級数に展開する；

$$\sigma(r,\theta)=\sum_n[f_n(r)\cos n\theta+g_n(r)\sin n\theta].$$

展開係数 $f_n(r)$ と $g_n(r)$ は r の既知関数と見なしてよい．$f_n(r)$, $g_n(r)$ と $A_n(\alpha)$, $B_n(\alpha)$ との関係を求めるために，$z=0$ で (5.27) が成り立たなければならないことを用いると

$$\left.\begin{aligned} 2\int_0^\infty J_n(\alpha r)A_n(\alpha)\alpha\,d\alpha &= -4\pi f_n(r) \\ 2\int_0^\infty J_n(\alpha r)B_n(\alpha)\alpha\,d\alpha &= -4\pi g_n(r) \end{aligned}\right\} \tag{5.44}$$

という二つの関係が得られる．これは $A_n(\alpha)$, $B_n(\alpha)$ を未知関数とする積分方程式である．この方程式はハンケルの積分定理 (2.18) を用いて解くことができる．(2.18) で $f(r)=F(r)\sqrt{r}$ とおけば，$F(r)\sqrt{r}$ が有界変動で，積分

$$\int_0^\infty |F(r)\sqrt{r}|dr$$

が存在するとき，$F(r)$ の連続な点では

$$F(r)=\int_0^\infty J_n(\sigma r)\sigma\,d\sigma\int_0^\infty J_n(\sigma\rho)F(\rho)\rho\,d\rho, \qquad n=0,1,2,\cdots$$

が成り立つから，(5.44) の両辺に $J_n(\rho r)r$ を掛けて積分すれば

$$\int_0^\infty J_n(\rho r)r\,dr\int_0^\infty J_n(\alpha r)A_n(\alpha)\alpha\,d\alpha = A_n(\rho) = -2\pi\int_0^\infty J_n(\rho r)f_n(r)r\,dr \tag{5.45}$$

となる．$g_n(r)$ についても類似の関係が得られる．したがって $\sigma(r,\theta)$ が与えられたとき，そのフーリェ展開係数 $f_n(r)$, $g_n(r)$ から $A_n(\alpha)$, $B_n(\alpha)$ が計算され，それらを用いてポテンシャルは (5.43) によって与えられることになる．

一例として面密度が

$$\sigma(r,\theta)=e^{-a^2r^2}, \qquad a>0$$

である場合を考える．密度分布は軸対称であるから，$f_0(r)$ だけが 0 でなく，他の $f_n(r)$, $g_n(r)$ はすべて 0 である．(5.45) から $A_0(\rho)$ は積分

$$A_0(\rho)=-2\pi\int_0^\infty J_0(\rho r)e^{-a^2r^2}r\,dr \tag{5.46}$$

によって与えられる．0 次のベッセル関数は

$$J_0(x)=\sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

であるから，上の積分は

$$\int_0^\infty J_0(\rho r)e^{-a^2r^2}r\,dr=\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\int_0^\infty(\rho^2r^2)^m e^{-a^2r^2}r\,dr$$

となる．右辺の積分で $a^2r^2=y$ とおけば

$$\int_0^\infty r^{2m+1}e^{-a^2r^2}dr=\frac{1}{2a^{2m+2}}\int_0^\infty y^m e^{-y}\,dy=\frac{1}{2a^{2m+2}}\Gamma(m+1)$$

となるから，上の等式の右辺は

$$\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1}\frac{\rho^{2m}}{a^{2m+2}}=\frac{1}{2a^2}e^{-\rho^2/4a^2}$$

となり

$$A_0(\rho)=-\frac{\pi}{a^2}e^{-\rho^2/4a^2} \tag{5.47}$$

を得る．これを用いるとポテンシャルは

$$V(r,\theta,z)=-\frac{\pi}{a^2}\cdot\int_0^\infty J_0(\alpha r)e^{-\alpha|z|}e^{-\alpha^2/4a^2}\,d\alpha$$

で与えられる．この積分を一般の z の値について既知の関数で表現することはできないが，$z=0$（平板上）ではこの積分の値を計算することができる．まずベッセル関数の積分表示（2.20）から

$$J_0(\alpha r)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(\alpha r\cos\theta)d\theta$$

と表わせることに注意すれば，上の積分は

$$\int_0^\infty J_0(\alpha r)e^{-\alpha^2/4a^2}\,d\alpha=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta\int_0^\infty\cos(\alpha r\cos\theta)e^{-\alpha^2/4a^2}\,d\alpha$$

となる．ところが

$$\int_0^\infty\cos xy\,e^{-px^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{p}\right)^{1/2}e^{-y^2/4p}$$

であるから

$$\int_0^\infty\cos(\alpha r\cos\theta)e^{-\alpha^2/4a^2}\,d\alpha=\sqrt{\pi}\,a\cdot e^{-r^2\cos^2\theta\,a^2}.$$

したがって

$$\int_0^\infty J_0(\alpha r)e^{-\alpha^2/4a^2}\,d\alpha=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^\pi e^{-r^2\cos^2\theta\,a^2}\,d\theta$$

$$=\frac{a}{\sqrt{\pi}}e^{-r^2a^2/2}\cdot\int_0^\pi e^{-a^2r^2\cos2\theta/2}\,d\theta$$

という関係を得る．ここで最後の積分は

$$\int_0^{\pi} e^{-a^2r^2\cos 2\theta/2}\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{u}[e^{-a^2r^2\cos\varphi/2}+e^{a^2r^2\cos\varphi/2}]\,d\varphi$$

と表わせることに注意すれば上の積分は

$$\frac{a}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-r^2a^2/2}\cdot\int_0^{\pi}\cos\left[i\frac{a^2r^2}{2}\cos\theta\right]d\theta=a\sqrt{\pi}\,e^{-a^2r^2/2}J_0\left(i\frac{a^2r^2}{2}\right)$$

となる．これは (*2.32*) によって定義される変形ベッセル関数を用いて表現できるから

$$\int_0^{\infty}J_0(\alpha r)e^{-\alpha^2/4a^2}\,d\alpha=a\sqrt{\pi}\,e^{-a^2r^2/2}I_0\left(\frac{a^2r^2}{2}\right),\quad a>0 \qquad (5.48)$$

という公式を得る．$z=0$ でのポテンシャルの値はこれからただちに求められる．

5.4 回転楕円体のポテンシャル

5.4.1 回転楕円体座標　直角座標 (x, y, z) とつぎのように関係づけられている曲線座標 (ζ, μ, θ) は回転楕円体座標とよばれている；

$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos\theta\\ y&=r\sin\theta\\ z&=k\zeta\mu\end{aligned}\right\},\quad \begin{aligned}&r=k\sqrt{(\zeta^2-1)(1-\mu^2)}.\\ &(\zeta\geq 1,\ -1\leq\mu\leq 1)\end{aligned} \qquad (5.49)$$

ただし k は正の定数である．回転楕円体座標がどのようなものであるかを調べるために，(*5.49*) からまず μ を消去すれば

$$\frac{r^2}{k^2(\zeta^2-1)}+\frac{z^2}{k^2\zeta^2}=1 \qquad (5.50)$$

となる．同じようにして ζ を消去すれば

$$\frac{z^2}{k^2\mu^2}-\frac{r^2}{k^2(1-\mu^2)}=1 \qquad (5.51)$$

という関係が得られる．さて焦点の位置が $(\pm\alpha, 0)$ にあり，長径が a である楕円の方程式は $x^2/a^2+y^2/(a^2-\alpha^2)=1$ であるから，(r, z) 面内の楕円 (*5.50*) は長径が $k\zeta$ で焦点を $z=\pm k$ にもっている．したがって，$\zeta=$ 一定という曲面は楕円を z 軸のまわりに回転したものである．また回転双曲線 (*5.51*) は焦点が $z=\pm k$ にあり，$z=\pm k\mu$ で z 軸と交わるようなもので

ある．座標系 (ζ, μ, θ) は直交座標系であって，この座標を用いたとき，ラプラスの方程式はつぎの形をとることが知られている；

$$\nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial\mu}\right\}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{(\zeta^2-1)V\right\}+\frac{\zeta^2-\mu^2}{(1-\mu^2)(\zeta^2-1)}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}=0. \tag{5.52}$$

楕円 (5.50) は z 軸のまわりに細長い．問題によって z 軸に関して偏平な楕円を用いることがある．そのような場合には (5.49) のかわりに

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= k\mu\zeta \end{aligned}\right\},\quad \begin{aligned} r &= k\sqrt{(1-\mu^2)(\zeta^2+1)} \\ &\zeta \geq 0,\quad -1\leq\mu\leq 1 \end{aligned} \tag{5.53}$$

で定義される座標系 (ζ, μ, θ) を用いることもある．(5.53) から μ を消去すると

$$\frac{r^2}{k^2(\zeta^2+1)}+\frac{z^2}{k^2\zeta^2}=1 \tag{5.54}$$

となり，ζ を消去すると双曲線

$$\frac{r^2}{k^2(1-\mu^2)}-\frac{z^2}{k^2\mu^2}=1 \tag{5.55}$$

を得る．したがって $\zeta=$ 一定の曲面は回転楕円面であり，$\mu=$ 一定の曲面は回転双曲面である．この座標でのラプラス方程式は

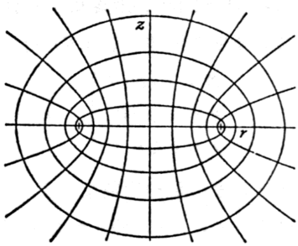


図 5.3　回転楕円体座標 $\zeta=$ 一定の曲面は回転楕円面，$\mu=$ 一定は回転双曲面である．

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial\mu}\right\}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{(\zeta^2+1)\frac{\partial V}{\partial\zeta}\right\}+\frac{\mu^2+\zeta^2}{(1-\mu^2)(1+\zeta^2)}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}=0 \tag{5.56}$$

となる．また μ の値が $\delta\mu$ だけ異なる二つの曲面間の距離を δs_μ とし，$\delta\zeta$, $\delta\theta$ に対応するものを δs_ζ, δs_θ とすればそれらは

$$\delta s_\mu = k\left(\frac{\zeta^2+\mu^2}{1-\mu^2}\right)^{1/2}\delta\mu,\quad \delta s_\zeta = k\left(\frac{\zeta^2+\mu^2}{\zeta^2+1}\right)^{1/2}\delta\zeta,$$

$$\delta s_\theta = k[(1-\mu^2)(\zeta^2+1)]^{1/2}\delta\theta \tag{5.57}$$

で与えられることが知られている．

5.4.2　回転楕円体のポテンシャル　回転楕円体の表面に物質が一定密度で分布しているときのポテンシャルを求めてみよう．その楕円体は偏平であると仮定する．対称軸を z 軸にとれば，V は θ に依存しないからラプラスの方程式は

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\cdot\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial\mu}\right\}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{(1+\zeta^2)\frac{\partial V}{\partial\zeta}\right\}=0$$

となる．変数分離による解を得るために $V=M(\mu)Z(\zeta)$ とおけば，ラプラス方程式は

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right\}+\nu(\nu+1)M=0,\quad \frac{d}{d\zeta}\left\{(1+\zeta^2)\frac{dZ}{d\zeta}\right\}-\nu(\nu+1)Z=0$$

となる，ここで $\nu(\nu+1)$ は分離の定数である．第一の方程式の解はルジャンドル関数 $P_\nu(\mu)$ と $Q_\nu(\mu)$ であるが，M は $-1\leq\mu\leq 1$ で有限でなければならないから，ν は整数値のみをとることができ，また $P_n(\mu)$ のみが許される．第二の方程式はルジャンドルの微分方程式（3.14）で ζ のかわりに $i\zeta$ と置いたものだから，独立な解は $P_n(i\zeta)$, $Q_n(i\zeta)$ である．ところが外では $\zeta\to\infty$ のとき，$P_n(i\zeta)$ は無限大となるから有限な物体のポテンシャルに対応しない．したがって $Q_n(i\zeta)$ が許される解である．$|\zeta|>1$ では $Q_n(i\zeta)$ は級数表示（3.28）によって与えられるから，ζ の実数値に対してポテンシャルが実数値をとるようにするには

$$V_1=\sum_n A_nP_n(\mu)Q_n(i\zeta)e^{(n+1)\pi i/2} \tag{5.58}$$

としておけばよい，ここに A_n は（実数の）定数である．

つぎに楕円体の内ではポテンシャルは有限でなければならないから

$$V_2=\sum_n P_n(\mu)P_n(i\zeta)e^{-n\pi i/2} \tag{5.59}$$

という解を得る．物質が分布している楕円体の表面は長径が $k\sqrt{1+\zeta_0{}^2}$ で焦点は z 軸から k だけ離れているとする．そこでポテンシャルは連続でなければならないから

$$A_nP_n(\mu)Q_n(i\zeta)e^{(n+1)\pi i/2}=B_nP_n(\mu)P_n(i\zeta)e^{-{}_n{}^{\pi i/2}},\qquad \zeta=\zeta_0$$

という関係が成り立つ．また表面に物質が分布しているから

$$\frac{\partial V_1}{\partial n}-\frac{\partial V_2}{\partial n}=4\pi\sigma,\qquad \zeta=\zeta_0$$

が成り立つが，楕円体の上での法線方向はζの増加する方向であり，曲線座標の変化 $\delta\zeta$ に対応して曲面は δs_ζ だけ動くことに注意すれば，この関係から

$$\frac{1}{k}\left(\frac{\zeta^2+1}{\zeta^2+\mu^2}\right)^{1/2}\left\{\sum_n A_n P_n(\mu)\frac{dQ_n(i\zeta)}{d\zeta}e^{(n+1)\pi i/2}-\sum_n B_n P_n(\mu)\frac{dP_n(i\zeta)}{d\zeta}e^{-n\pi i/2}\right\}$$
$$=4\pi\sigma,\qquad \zeta=\zeta_0$$

を得る．まず最初の等式から，$A_nQ_n(i\zeta_0)=B_nP_n(i\zeta_0)e^{-(2n+1)\pi i/2}$ が得られ，これを上の関係に代入すれば

$$\frac{1}{k}\left(\frac{\zeta^2+1}{\zeta^2+\mu^2}\right)^{1/2}\sum_n A_n P_n(\mu)\left\{iQ_n'(i\zeta_0)e^{(n+1)\pi i/2}-iP_n'(i\zeta_0)\frac{Q_n(i\zeta_0)}{P_n(i\zeta_0)}e^{(n+1)\pi i/2}\right\}$$
$$=4\pi\sigma$$

となる，ただし $'$ は引数についての微分を示す．これは（3.37）によって

$$\sum A_n e^{n\pi i/2}\frac{P_n(\mu)}{P_n(i\zeta_0)}=-4\pi\sigma k[(1+\zeta_0{}^2)(\zeta_0{}^2+\mu^2)]^{1/2} \tag{5.60}$$

と表わすこともできる．

さて ζ の値が $\delta\zeta$ だけ異なる二つの回転楕円体曲面の間の距離は δs_ζ であるから，二つの曲面 $\zeta=\zeta_0$ と $\zeta=\zeta_0-\delta\zeta$ の間に一定密度（ρ）の物質があれば，その量は単位面積あたり

$$\rho\,\delta s_\zeta=k\rho(\zeta_0{}^2+\mu^2)^{1/2}(1+\zeta_0{}^2)^{-1/2}\,\delta\zeta$$

である．したがって面密度として

$$\sigma=C(\zeta_0{}^2+\mu^2)^{1/2}(1+\zeta_0{}^2)^{-1/2} \tag{5.61}$$

をとることは，楕円体の表面に，単位面積あたり同一量の物質が分布していることを意味する．このとき物質の全質量 M は（5.57）から

$$M=2\pi k^2\int_{-1}^{1}\sqrt{(\zeta_0{}^2+1)(\zeta_0{}^2+\mu^2)}\,\sigma\,d\mu=4\pi k^2C\left(\zeta_0{}^2+\frac{1}{3}\right)$$

となる．また（5.61）を（5.60）に代入すると

$$\sum A_n e^{n\pi i/2}\frac{P_n(\mu)}{P_n(i\zeta_0)}=-4\pi kC(\zeta_0{}^2+\mu^2)$$
$$=-4\pi kC[\zeta_0{}^2+1/3+2P_2(\mu)/3]$$

となるから

$$A_0=-4\pi kC(\zeta_0{}^2+1/3),\qquad A_2=8\pi kC\,P_2(i\zeta_0)/3$$

$$A_1 = A_3 = A_4 = \cdots = 0$$

を得る．$Q_0(i\zeta) = -i\tan^{-1}(1/\zeta)$, $Q_2(i\zeta) = P_2(i\zeta)Q_0(i\zeta) - 3i\zeta/2$ であるからポテンシャルは

$$V_1 = -\frac{Mi}{k}\{Q_0(i\zeta) - P_2(\mu)Q_2(i\zeta)\}$$

$$= -\frac{M}{k}\left\{\tan^{-1}\frac{1}{\zeta} - P_2(\mu)\left[-\left(\frac{3}{2}\zeta^2+\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\frac{1}{\zeta}+\frac{3}{2}\zeta\right]\right\}$$

となる．$\zeta\to\infty$ のときのポテンシャルの形は $\tan^{-1}(1/\zeta)$ のべき級数展開により

$$V_1 = -\frac{M}{k}\left\{\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{3\zeta^3} - \frac{2}{5\zeta^3}P_2(\mu) + O(\zeta^{-5})\right\}$$

となる．ところが (5.53) から

$$R^2 = x^2+y^2+z^2 = k^2(1+\zeta^2-\mu^2)$$

であるから，$\zeta\to\infty$ のとき漸近的に

$$k\zeta \to (x^2+y^2+z^2)^{1/2} = R$$

である．したがって V_1 の漸近形は $-M/R$ であり，これは質量 M の質点によるポテンシャルにほかならない．

5.4.3 マクローリンの楕円体　楕円体座標 $\zeta = \zeta_0$ で与えられる曲面の内部に物質が一定密度で分布しているときの楕円体のポテンシャルを求めよう．楕円体内部ではポアッソンの方程式

$$\nabla^2 V_2 = 4\pi\rho, \qquad 0 \ge \zeta \ge \zeta_0$$

が成り立つから，V_2 はこの方程式の特殊解と，ラプラス方程式の一般解の和である．特殊解 V_p がつぎの形をもつことは直接確めることができる；

$$V_p = 2\pi\rho\left\{\frac{2}{k^2({\zeta_0}^2+1)} + \frac{1}{k^2{\zeta_0}^2}\right\}^{-1}\left\{\frac{x^2+y^2}{k^2({\zeta_0}^2+1)} + \frac{z^2}{k^2{\zeta_0}^2}\right\}. \tag{5.62}$$

また楕円体の外部ではラプラス方程式が成り立つから

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \sum A_n P_n(\mu) Q_n(i\zeta) e^{(n+1)\pi i/2}, & \zeta > \zeta_0 \\ V_2 &= V_p + \sum B_n P_n(\mu) P_n(i\zeta) e^{-n\pi i/2}, & \zeta \le \zeta_0 \end{aligned}\right\} \tag{5.63}$$

によってポテンシャルは与えられる．$\zeta = \zeta_0$ でポテンシャルと，法線方向の微係数は連続でなければならないから

$$\sum A_n P_n(\mu) Q_n(i\zeta_0) e^{(n+1)\pi i/2} = 2\pi\rho \frac{k^2\zeta_0{}^2(\zeta_0{}^2+1)}{3\zeta_0{}^2+1} + \sum B_n P_n(\mu) P_n(i\zeta_0) e^{-n\pi i/2},$$

$$i\sum A_n P_n(\mu) Q_n{}'(i\zeta_0) e^{(n+1)\pi i/2} = \left.\frac{\partial V_p}{\partial \zeta}\right|_{\zeta_0} + i\sum B_n P_n(\mu) P_n{}'(i\zeta_0) e^{-n\pi i/2}$$

という関係が得られる．ところが V_p を楕円体座標で表わせば

$$V_p = 2\pi\rho \frac{k^2\zeta_0{}^2(\zeta_0{}^2+1)}{3\zeta_0{}^2+1}\left\{\frac{\zeta^2+1-\mu^2-\mu^2\zeta^2}{\zeta_0{}^2+1} + \frac{\mu^2\zeta^2}{\zeta_0{}^2}\right\}$$

となり，これを上の等式に代入して整理すれば

$$i\sum A_n P_n(\mu) Q_n{}'(i\zeta_0) e^{(n+1)\pi i/2} = i\sum B_n P_n(\mu) P_n{}'(i\zeta_0) e^{-n\pi i/2} + 2\pi\rho\, k^2 \frac{2\zeta_0}{3}\left\{1 + \frac{2}{3\zeta_0{}^2+1} P_2(\mu)\right\}$$

を得る．これらの関係から係数 A_n, B_n が定まって

$$A_0 = -2\pi\rho\, k^2 \frac{2\zeta_0}{3Q_0{}'(i\zeta_0)} = -2\pi\rho\, k^2 \frac{2\zeta_0(\zeta_0{}^2+1)}{3},$$

$$B_0 = -2\pi\rho\, k^2(\zeta_0{}^2+1)\left[\frac{\zeta_0{}^2}{3\zeta_0{}^2+1} - \frac{\zeta_0}{3}\tan^{-1}\frac{1}{\zeta_0}\right],$$

$$A_2 = -2\pi\rho\, k^2 \frac{2}{3}\zeta_0(1+\zeta_0{}^2),$$

$$B_2 = -2\pi\rho\, k^2 \frac{2\zeta_0}{3}(\zeta_0{}^2+1)\left[\tan^{-1}\frac{1}{\zeta_0} - \frac{3\zeta_0}{3\zeta_0{}^2+1}\right],$$

$$A_1 = A_3 = A_4 = \cdots \quad 0,$$

$$B_1 = B_3 = B_4 = \cdots \quad 0$$

となる．一方 (5.52) から，ルジャンドル関数を円柱座標で表わせば

$$P_0(\mu)P_0(i\zeta) = 1, \quad P_2(\mu)P_2(i\zeta) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2k^3}z^2 + \frac{3}{4k^2}r^2$$

であることは容易に確められる．これらの表現を (5.63) に代入すれば

$$\left.\begin{aligned} &V_1 = -\pi\rho[\alpha(x^2+y^2)+\beta z^2], \qquad \zeta \leq \zeta_0 \\ &\alpha = \zeta_0{}^2 - \zeta_0(\zeta_0{}^2+1)\tan^{-1}\frac{1}{\zeta_0}, \quad \beta = 2(1+\zeta_0{}^2)\left[\zeta_0\tan^{-1}\frac{1}{\zeta_0} - 1\right] \end{aligned}\right\} \quad (5.64)$$

という結果が得られる．

(5.64)で与えられるポテンシャルを用いて回転流体の平衡形状を求めるこ

とを考えよう．密度 ρ の非圧縮性流体が z 軸のまわりに一定角速度 ω で自転しているとき，その平衡形状の一つは回転楕円体であることがマクローリン（Maclaurin）によって示された．回転流体が平衡状態にあるとき，圧力 p はつぎの関係によって与えられる；

$$\frac{p}{\rho}=\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)-V_1+\text{定数}.$$

圧力一定の曲面はしたがって

$$\left(\alpha+\frac{\omega^2}{2\pi\rho}\right)(x^2+y^2)+\beta z^2=\text{一定}$$

という方程式をもつ．楕円体の表面では圧力は 0 であるから，この曲面の一つと，楕円体（(5.54) で $\zeta=\zeta_0$ とおいたもの）とは一致しなければならない．よって

$$\left(\alpha+\frac{\omega^2}{2\pi\rho}\right)\Big/\beta=\zeta_0{}^2/(\zeta_0{}^2+1)$$

という関係を得る．これに（5.64）を代入すれば，ω と ζ_0 の関係は

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho}=(3\zeta_0{}^3+\zeta_0)\tan^{-1}\frac{1}{\zeta_0}-3\zeta_0{}^2 \tag{5.65}$$

となる．このように回転角速度 ω と，楕円体曲面の座標 ζ_0 が上の関係を満たすとき，それは一つの平衡形状なのである．ニュートンは回転している天体（惑星）の形状は楕円体であると仮定したが証明は与えなかった．その証明はマクローリンによって，後に与えられたのである．

(5.65)は楕円体の回転角速度と離心率の関係を与えるが，回転角速度と楕円体の形状から角運動量を計算することができる．したがって回転楕円体の離心率と角運動量の間にはある定まった関係が存在する．角運動量がある一定値より大であれば，三軸不等の楕円体も平衡形状であることをヤコビが示した．それらの楕円体が実際に存在し得るためにはそれらは力学的に安定な状態になければならない．ヤコビ楕円体の安定性の議論にはラメ関数の理論が必要であって，ポアンカレはそれを用いて楕円体の永年安定性を議論したが，動的安定性は近年になってようやく解決された．この問題は月や連星の起源に関連して重要となってくる．

5.4.4 帯電した中空楕円体のポテンシャル 導電性物質からできている中空

回転楕円体が電荷を帯びているとき，それによる電気ポテンシャルは，ラプラス方程式の解 (5.58) を使って求めることができる．導体上の電位は一定であるから，その値を V_0 とする．表面 $\zeta=\zeta_0$ でポテンシャルは連続であるから (5.58) により

$$V_0=\sum_n A_n P_n(\mu) Q_n(i\zeta_0) e^{(n+1)\pi i/2}$$

を得る．左辺は μ に関して定数であるから，右辺では $P_0(\mu)$ の項を除いてすべて 0 でなければならない．ゆえに

$$A_0=\frac{V_0}{iQ_0(i\zeta_0)}=\frac{V_0}{\tan^{-1}(1/\zeta_0)}, \qquad A_1=A_2=\cdots=0$$

を得る．$\zeta<\zeta_0$ ではポテンシャルの値は一定である．したがって表面電荷密度 σ は (5.27) により

$$\sigma=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V_1}{\partial n}=-\frac{1}{4\pi k}\cdot\left(\frac{\zeta_0{}^2+1}{\zeta_0{}^2+\mu^2}\right)^{1/2} A_0 Q_0{}'(i\zeta_0)$$

となる．

5.4.5　薄い任意の密度分布をもつ円盤　一定密度の円盤によるポテンシャルはすでに 5.2.3 項で求めたが，ここでは任意の（ただし軸対称）密度分布をもつ円盤を考え，それのポテンシャルを計算してみよう．この問題は円盤状銀河の力学に関して重要である．

まず円盤の半径を R とし，$k=R$ である楕円体座標 (5.53) をとり，円盤は平面 $\zeta=0$ 上にあるとしよう．$\zeta>0$ に物質分布はないから，そこではラプラス方程式が成り立ち，その解は (5.58) で与えられる．そこに現われる任意定数 $A_n(n=0,1,2,\cdots)$ を定めるために (5.27) を用いるのがよい．ポテンシャルは平面 $z=0$ に関して対称であることを考慮すれば，(5.27)は

$$2\pi\sigma=\frac{1}{R}\left(\frac{\zeta^2+1}{\zeta^2+\mu^2}\right)^{1/2}\frac{\partial V}{\partial \zeta}, \qquad \zeta=0 \tag{5.66}$$

となる．さて密度分布 $\sigma(r)$ は

$$\sigma(r)=\sum_n \frac{1}{\mu}\cdot S_n P_n(\mu), \quad \mu=\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2}$$

と展開できるとしよう．そのとき展開係数 S_n は

$$S_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}\sigma[R\sqrt{1-\mu^2}]\,\mu P_n(\mu)\,d\mu$$

で与えられるから，S_n は既知と見なしてよい．この展開を (5.66) に代入し両辺の係数を比較すれば

$$2\pi S_n = -\frac{A_n}{R} Q_n'(0) e^{n\pi i/2}$$

となる．$Q_n'(0)$ の値は漸化式 (3.38), (3.40) を用いて求めることができる；

$$\left.\begin{aligned} &Q_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi i}{2}, \quad Q_{2n+1}(0) = (-1)^{n+1}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \\ &Q_n'(0) = -(n+1)Q_{n+1}(0), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{5.67}$$

したがって $\zeta > 0$ でのポテンシャルは，この $Q_n'(0)$ の表現を用いれば

$$V = -2\pi Ri \sum_n S_n P_n(\mu) \frac{Q_n(i\zeta)}{Q_n'(0)} \tag{5.68}$$

によって与えられる．

演習問題

1. 5.3.1 項の方法を使って，面密度分布 σ が

$$\sigma = \begin{cases} J_0(\lambda r), & 0 < r < R \\ = 0, & r \geq R \end{cases}$$

であるときの $z = 0$ でのポテンシャルは

$$V = 2\pi \left\{ \frac{1}{\lambda} J_0(\lambda r) + \frac{4}{\pi^2 Y_0(\lambda R)} \cdot \int_0^\infty \frac{I_0(kr) K_0(kR)}{\lambda^2 + k^2} dk \right\}$$

で与えられることを示せ．ただし λ は超越方程式

$$J_0(\lambda R) = 0$$

の根である．

［ヒント：ω-平面上の関数

$$\frac{J_n(\omega r) H_n^{(1)}(\omega R)}{\omega^2 - \lambda^2}$$

の適当な径路に沿っての積分を考察せよ．］

2. 球座標 (r, θ, φ) を用いたとき，頂点が $r = 0$ にある円錐 $\theta = \alpha$ 上でポテンシャルは 0 に保たれている．z 軸上の点 $r = a$ に点電荷 e があるときのポテンシャルを求めよ．

3. 薄い円板による引力が円板上で中心を向き，その大きさが中心からの距離に比例するとき，円板の密度分布は $(1 - r^2/R^2)^{1/2}$ に比例することを示せ，ここに R

は円板の半径である.

4. 同じ形と質量をもった二つの円環の中心が d だけ離れ，それらを結ぶ直線が二つの円環に直交するとき，二つの円環に働く引力を求めよ.

5. つぎの積分公式を証明せよ；

$$\int_0^\infty \cos xy \exp(-p^2 x)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp(-y^2/4p).$$

6 章
熱伝導問題への応用

6.1 固体内での熱伝導

6.1.1 熱伝導の基礎方程式　特殊関数がその重要性を発揮する一つの分野に熱伝導がある．固体内の熱伝導は単に工学上の応用という点から重要なだけでなく，地球物理学でも重要な問題である．また熱伝導の基礎方程式は拡散方程式や中性子の輸送方程式とも形式的には同一である．その意味で化学，生化学，原子炉物理学等においても熱伝導の理論は応用することができる．ここでは便宜上，温度，比熱というような言葉を用いるが，それらの言葉を置き換えるだけで，他の現象に応用できるということをまず指摘しておこう．

ある固体の熱的状態を定めるには，その物体の温度，比熱，密度，膨張係数，熱伝導係数が必要である．熱膨張が重要となるような大きな温度変化は普通熱伝導の問題からは除外されるので，ここでも考えないことにする．固体内の温度は位置によって異なるが，温度が一定値である曲面を等温面とよんでいる．等温面は無限個存在するが，異なった温度に対応する等温面は決して交わることはない，なぜなら物体の同一部分が異なった温度をとり得ないからである．一般にある単位面積を通して単位時間に流れる熱量を熱流束という．また物理的な性質が方向によらないような物体は等方的であるといわれる．

熱伝導の理論ではつぎの命題が基本的仮説として用いられている，すなわち，等温面の一方 (1) から他方 (2) への熱流束は

$$-K\frac{\partial T}{\partial n}$$

で与えられる．ただし K は熱伝導係数とよばれる物質固有の定数であり，

T は物体内の温度，$\partial/\partial n$ は等温面に垂直な方向（1 から 2 へを正とする）の微分を示す．

この仮説が正しいか否かは，それから理論的に導かれる結果と，実験結果とを比較して確めることができる．いままで行われた実験の結果はこの仮説の正しさを示しているので，この命題を基本法則と見なしそれに従って熱伝導の理論を展開することにする．必ずしも等温面の一部でない微小な面積 dS を考えて，その面積を通じて単位時間に流れる熱量を求めてみよう．その面積の単位法線を $\boldsymbol{l}$，その点を通る等温面の単位法線を $\boldsymbol{n}$ とすれば，dS を通過する熱量は単位時間当り

$$-K\,\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}\frac{\partial T}{\partial n}\,dS = -K\,\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{grad}\,T\,dS \qquad (6.1)$$

である．S を任意の閉曲面とし，その内部に熱源がないとしよう．そうすれば，S を通して時間 dt の間に流入した熱量は，熱力学の第一法則により，S で囲まれた部分 V の熱量の増加に等しい．この増加分は

$$dt\int_V \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t}\,d\tau, \qquad d\tau = dx\,dy\,dz \qquad (6.2)$$

である，ここに ρ は密度，C_v は定積比熱である．S を通して流入する熱量は，$\boldsymbol{l}$ を外向き（単位）法線とすれば

$$dt\int_S K\,\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{grad}\,T\,dS = dt\int_V \mathrm{div}(K\,\mathrm{grad}\,T)\,d\tau$$

となる，ここでガウスの定理（5.26）を用いた．これら二つを等しいとおけば

$$\int_V\left\{\mathrm{div}(K\,\mathrm{grad}\,T) - \rho C_v\frac{\partial T}{\partial t}\right\}d\tau = 0$$

という関係を得るが，体積 V は任意であるから，かっこの中が 0 でなくてはならない；

$$\rho C_v\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(K\,\mathrm{grad}\,V). \qquad (6.3)$$

これが熱伝導の基礎方程式である．とくに熱伝導係数 K が位置によらず，また ρC_v も一定値をとるとき，この方程式は簡単に

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T, \quad \kappa = \frac{K}{\rho C_v} \tag{6.4}$$

という形をとる．κ のことを温度伝導度（係数）とよぶ．考えている物体が熱的に定常になったとき $\partial T/\partial t$ は 0 であるから，(6.4) はラプラスの方程式に帰着される．

いままでは物体中に熱源がないと仮定して基礎方程式を求めた．しかし地殻中に含まれている放射性物質のように，熱を発生する源が存在する場合がある．体積 $d\tau$ から発生する熱量が $Q\,d\tau\cdot dt$ であるとき，(6.3) の右辺に Q が付け加えられなければならない．このときには (6.3) の代りに

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(K\,\mathrm{grad}\,T) + Q \tag{6.5}$$

が基礎方程式となる．地球内に分布している放射性物質による熱源は位置によるのみならず，時間によってもその強さが変化する．このように Q は一般に位置と時間の関数である．

6.1.2 境界条件　異なった物理的性質（熱伝導係数，比熱，密度）をもつ二つの物体が接触しているとき，その境界で満たされなければならない条件を境界条件という．境界条件の一つは，温度 T が連続でなければならないということである．第二の境界条件は温度 T の微分に関するものである．ある平面に入ってくる熱流束と，その面を出ていく熱流束は熱の源がない限り，同じでなければならない．したがって熱流束は異なった物体の接触面で連続である．

物体が真空と接しているときはどのような境界条件を用いるべきかについて考えておく必要がある．そのとき物体の表面から熱は輻射として失われて行く．もしその物体表面を黒体と見なすことができれば，その表面の単位面積から毎秒失われる熱量は σT^4 である，ただし σ はステファン・ボルツマンの定数である．現実の物体はこれに E（輻射能）を掛けた割合で熱を失うから

$$-K\frac{\partial T}{\partial n} = \sigma E T^4 \tag{6.6}$$

という境界条件を得る．また物体が温度 T_0 の黒体容器の中にあれば，それは $\sigma E T_0{}^4$ の割合で熱を吸収する．したがって境界条件は

$$-K\frac{\partial T}{\partial n}=\sigma E\cdot(T^4-T_0^4)$$

となる．$T-T_0$ は T_0 に比して小とすれば，この境界条件は近似的に

$$-K\frac{\partial T}{\partial n}=4\sigma ET_0^3(T-T_0)$$

または

$$\frac{\partial T}{\partial n}+h(T-T_0)=0,\quad h\equiv\frac{4\sigma ET_0^3}{K}\tag{6.7}$$

となる．

6.2　無限円柱内の熱の流れ

6.2.1　定常状態　ベッセル関数が広く応用できる問題の一つに，無限に長い円柱内の熱の流れがある．現実に無限に長い円柱は存在しないが，円柱の半径に比して円柱の長さが十分大きければ，それは無限に長い円柱と見なすことができる．そのような円柱内の温度の変化を考えるのであるが，まず定常流を考えることから始めよう．

定常状態に対する熱伝導の方程式はラプラスの方程式である．円柱の中心が z 軸である円柱座標（r,θ,z）を使えばそれは

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0\tag{6.8}$$

である．温度 T が z, θ に依存しないもっとも簡単な場合を考えると (6.8) は

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{dT}{dr}\right]=0$$

となるから，これを積分して

$$r\frac{dT}{dr}=\text{一定}=A,\quad T=A\log r+B$$

という解が得られる，ここに A, B は任意の定数である．もし円柱が中心 $r=0$ までつまっていれば，$A=0$ であることは明らかである．定常な温度分布は $T=B$ となり，B は円柱の外径 $r=b$ での温度に等しくなる．しかし円柱が中空であって，内径 $r=a$ で $T=T_1$，外径 $r=b$ で T_2 に温度が保たれていれば

$$A\log a+B=T_1,\quad A\log b+B=T_2$$

から二つの定数 A, B の値は定まる．こうして温度分布は

$$T=\frac{T_2-T_1}{\log(b/a)}\cdot\log(r/a)+T_1 \tag{6.9}$$

となる．また $r=b$ で温度が与えられている代りに，温度 T_2 である媒質に輻射によって熱が失われるときには，(6.7) によって

$$\frac{\partial T}{\partial r}+h(T-T_2)=0,\qquad r=b \tag{6.10}$$

が成り立つから，$r=a$ で $T=T_1$ という条件と組み合わせて

$$T=\frac{T_1[1+hb\log(b/r)]+hbT_2\log(r/a)}{1+hb\log(b/a)} \tag{6.11}$$

が得られる．内径 $a=0$ であるときには，明らかに $T_1=T_2$ でなければならない．

6.2.2 つまった円柱の初期条件が与えられたとき 時刻 $t=0$ に温度分布が与えられたとき，どのようにして定常状態が到達されるかという問題を考えよう．$r=b$ で温度 T は 0 であるとする．もし $r=b$ で一定温度に保たれているとき，その温度との差を考えれば，それは同一の方程式を満足し，$r=b$ では 0 となる．したがって $r=b$ で温度 $T=0$ であるとして一般性は失われない．熱伝導の方程式はこの場合

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{6.12}$$

であるから，変数分離

$$T=e^{-\kappa\alpha^2 t}R(r)$$

を行えば，R に関する微分方程式は

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\alpha^2R=0 \tag{6.13}$$

となる．これはベッセルの微分方程式 (2.5) で $\nu=0$, $z=\alpha r$ とおいたものであるから，一般解は $J_0(\alpha r)$ と $Y_0(\alpha r)$ の1次結合である．しかし，$r=0$ で解は有限でなければならないから，$Y_0(\alpha r)$ は除かれる．こうして一つの解

$$T=e^{-\kappa\alpha^2 t}J_0(\alpha r)$$

が得られた．α は変数分離の定数で任意であるが，$r=b$ で $T=0$ という条件から，α は超越方程式

$$J_0(\alpha b)=0 \tag{6.14}$$

の根でなければならない．この方程式は無限個の実数根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ をもっている．どの α の値に対しても境界条件は満足されるから，偏微分方程式 (6.12) の一般解は

$$e^{-\kappa\alpha_n^2 t}J_0(\alpha_n b)$$

の重ね合わせで与えられる；

$$T(r,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-\kappa\alpha_n^2 t}J_0(\alpha_n r) \tag{6.15}$$

境界条件として $r=b$ で $T=0$ のかわりに，輻射の条件 (6.10) が与えられているとき，α は超越方程式

$$\alpha J_0'(\alpha b)+hJ_0(\alpha b)=0 \tag{6.16}$$

を満足しなければならない．この方程式も無限個の実根をもっていることが知られている．この場合でも，偏微分方程式の一般解は (6.15) で与えられ，ただ α として (6.16) の根を採用することに注意すればよい．

6.2.3　ベッセル関数のつくる直交関数列　n を正整数，α, β を二つの定数としてベッセル関数 $J_n(\alpha r)$, $J_n(\beta r)$ を考える．それらは微分方程式

$$\frac{d^2J_n(\alpha r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dJ_n(\alpha r)}{dr}+\left(\alpha^2-\frac{n^2}{r^2}\right)J_n(\alpha r)=0$$

$$\frac{d^2J_n(\beta r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dJ_n(\beta r)}{dr}+\left(\beta^2-\frac{n^2}{r^2}\right)J_n(\beta r)=0$$

を満足する．最初の方程式に $J_n(\beta r)$ を掛けたものから，あとの方程式に $J_n(\alpha r)$ を掛けたものを引き算すれば

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{dJ_n(\alpha r)}{dr}J_n(\beta r)-r\frac{dJ_n(\beta r)}{dr}J_n(\alpha r)\right\}=(\beta^2-\alpha^2)J_n(\alpha r)J_n(\beta r) \tag{6.17}$$

となるから，これに r を掛けて $0\leq r\leq b$ で積分すれば

$$\left[r\frac{dJ_n(\alpha r)}{dr}J_n(\beta r)-r\frac{dJ_n(\beta r)}{dr}J_n(\alpha r)\right]_{r=0}^{r=b}=(\beta^2-\alpha^2)\int_0^b rJ_n(\alpha r)J_n(\beta r)dr$$

という関係が得られる．$J_n(z)$ は $z=0$ で有限確定値をもつから，左辺の

$r=0$ における値は 0 となる．それゆえこの等式は

$$b\cdot\{\alpha J_n'(\alpha b)J_n(\beta b)-\beta J_n'(\beta b)J_n(\alpha b)\}=(\beta^2-\alpha^2)\int_0^b rJ_n(\alpha r)J_n(\beta r)dr, \tag{6.18}$$

と書くことができる．もし α, β が超越方程式

$$J_n(\alpha b)=0 \tag{6.19}$$

の根 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$ のどれか二つであれば，(6.18) から

$$\int_0^b rJ_n(\alpha_k b)J_n(\alpha_l b)dr=0, \qquad \alpha_k \neq \alpha_l \tag{6.20}$$

という関係を得る．云い換えれば関数列

$$J_n(\alpha_0 r),\quad J_n(\alpha_1 r),\quad J_n(\alpha_2 r), \cdots$$

は区間 $0\leq r\leq b$ で直交関数列をつくっている．

また超越方程式 (6.19) のかわりに，(6.16) を一般化した

$$\alpha J_n'(\alpha b)+hJ_n(\alpha b)=0 \tag{6.21}$$

の根 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots$ からも同じようにして直交関数列をつくることができる．α, β はこの方程式の異なる根であるとすれば，(6.18) の左辺が 0 となることが容易に示されるからである．

このようにしてつくられる直交関数のノルムは (6.18) で $\beta\to\alpha$ のときの極限値を計算することから求められる．まず β は $\alpha=\alpha_k$ に近いとして

$$\beta=\alpha_k+\varepsilon, \qquad |\varepsilon|\ll 1$$

とすれば，テイラー展開により

$$J_n(\beta b)=J_n(\alpha_k b)+J_n'(\alpha_k b)b\varepsilon+\cdots,\quad \beta^2-\alpha^2=2\alpha_k\varepsilon+\cdots$$

ただし $\cdots$ は ε の高次の項を示している．条件 (6.19) を用いると (6.18) はつぎのようになる；

$$b^2\alpha_k\varepsilon[J_n'(\alpha_k b)]^2\cdots=2\alpha_k\varepsilon\int_0^b rJ_n(\alpha_k r)J_n(\alpha_k r+\varepsilon r)dr.$$

したがって $\varepsilon\to 0$ の極限値をとれば

$$\int_0^b rJ_n^2(\alpha_k r)dr=\frac{b^2}{2}[J_n'(\alpha_k b)]^2,\ \ J_n(\alpha_k b)=0 \tag{6.22}$$

が得られる．超趣方程式 (6.19) のかわりに (6.21) の根 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots$ から直交関数列をつくったときには，(6.18) の左辺で $\alpha=\alpha_k$, $\beta=\alpha_k+\varepsilon$ とおけ

ば，それは

$$bJ_n'(\alpha_k b)[\alpha_k bJ_n'(\alpha_k b)-J_n(\alpha_k b)]\varepsilon-bJ_n(\alpha_k b)J_n''(\alpha_k b)\alpha_k b\varepsilon+\cdots$$

となる．ベッセルの微分方程式（6.20）とを使えばこの表式は

$$(h^2b^2+\alpha_k^2b^2-n^2)J_n^2(\alpha_k b)\varepsilon/\alpha_k b+\cdots$$

となり，$\varepsilon\to 0$ の両辺の極限値を計算すればノルムは

$$\int_0^b rJ_n^2(\alpha_k r)dr=\frac{1}{2\alpha_k^2}(h^2b^2+\alpha_k^2b^2-n^2)J_n^2(\alpha_k b),$$

$$\alpha_k J_n'(\alpha_k b)+hJ_n(\alpha_k b)=0 \tag{6.23}$$

によって与えられる．

6.2.4　問題の完全解　偏微分方程式（6.12）の一般解として得られた（6.15）に現われるベッセル関数は直交関数列であるので，その性質を使えば，（6.15）の任意定数 A_n を初期の温度分布から求めることができる．まず $t=0$ とおけば，つぎの関係が成り立つ；

$$T(r,t=0)=f(r)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nJ_0(\alpha_n r).$$

ここに $f(r)$ は初期の温度分布で与えられた関数，$\alpha_0, \alpha_1, \cdots$ は（6.19）の根である．関数列 $J_0(\alpha_0 r), J_0(\alpha_1 r), \cdots$ の直交性の関係（6.20）とノルムが（6.22）で与えられることを用いると，展開係数 A_n は

$$A_n=\frac{2}{[bJ_0'(\alpha_n b)]^2}\int_0^b f(r)J_0(\alpha_n b)r\,dr$$

で与えられることになる．これを（6.15）に代入すれば

初期温度 $f(r)$，表面温度 0 のとき

$$T=\frac{2}{b^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_n r)}{[J_0'(\alpha_n b)]}e^{-\kappa\alpha_n^2 t}\int_0^b f(r)J_0(\alpha_n b)r\,dr \tag{6.24}$$

によって問題の解が得られる．また同じようにして

初期温度 $f(r)$ 表面では輻射条件がなり立つときの解は

$$T=\frac{2}{b^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n^2J_0(\alpha_n r)}{(\alpha_n^2+h^2)J_0^2(\alpha_n b)}e^{-\kappa\alpha_n^2 t}\int_0^b f(r)J_0(\alpha_n r)r\,dr \tag{6.25}$$

で与えられる，ただし α_n は（6.21）の根である．

円柱の表面が熱の絶縁物でおおわれているとき，そこで熱流束は 0 であるから $\partial T/\partial r=0$ でなければならない．その場合の解は形式的に（6.21）で

$h=0$ とおいて得られると考えられるが，そうではない．(6.21) で $h=0$ とおいたとき，$t\to+\infty$ で T は 0 となってしまう．ところが円柱の最初にもっていた熱量は保存される筈であるから，(6.21)は完全な解となっていない．熱伝導の方程式 (6.12) の一つの解は $T=$ 定数であるから，(6.25) に定数を加えたもの．

$$T=C+\frac{2}{b^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_n r)}{J_0{}^2(\alpha_n b)}e^{-\kappa\alpha_n{}^2t}\int_0^b f(r)J_0(\alpha_n r)r\,dr \qquad (6.26)$$

も (6.12) の解で，条件

$$T(r,t=0)=f(r),\qquad \partial T/\partial r=0,\qquad r=b$$

を満足している．定数 C は円柱の単位長さあたりの熱量が保存されるという条件から求めることができる．その条件は

$$\int_0^b T\,r\,dr=\int_0^b f(r)r\,dr$$

と表わせる．ところが (2.21) と (2.22) から

$$\int_0^z zJ_0(z)dz=\int_0^z\frac{d}{dz}[zJ_1(z)]\,dz=-zJ_0{}'(z)$$

となるから，上の等式の右辺は $b^2C/2$ となる．したがって C は

$$C=\frac{2}{b^2}\int_0^b f(r)r\,dr$$

によって与えられる．これが絶縁体でおおわれた円柱内の熱伝導の解である．

6.2.5 中空円柱内の熱の流れ　内径，外径が a, b である円柱内の熱の流れを考えよう．$r=a$, b での温度がそれぞれ T_1, T_2 に保たれているときの定常温度分布は (6.11) で与えられる．それを T_S で表わそう．いま $t=0$ での温度分布 $f(r)$ が与えられ，$r=a,b$ での温度が T_1, T_2 に保たれているとき，どのように温度分布が定常状態に近づくかという問題を考えよう．まず

$$T=T_C+T_S$$

とおいて (6.12) に代入すれば，T_C に対する方程式は

$$\frac{\partial T_C}{\partial t}=\kappa\left(\frac{\partial^2 T_C}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_C}{\partial r}\right)\qquad a\le r\le b$$

となる．また T_C に対する境界条件は明らかに

$$T_C = 0, \qquad r = a, b$$

である．したがって問題はこの境界条件のもとでの熱伝導方程式の解を求めることに帰着される．

まえとの類推で

$$e^{-\kappa\alpha^2 t}R(r)$$

の形の解を仮定すれば，$R(r)$ の満足すべき方程式は

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\alpha^2R=0$$

となる．この方程式は0次のベッセル微分方程式であるから，その一般解は第一種，第二種ベッセル関数 $J_0(\alpha r)$, $Y_0(\alpha r)$ の一次結合で与えられる；

$$R(r) = AJ_0(\alpha r)+BY_0(\alpha r).$$

許される α の値はまえと同様，境界条件によって定まる．$r=a,b$ でこの関数は0となるから，つぎの二式を得る；

$$AJ_0(\alpha a)+BY_0(\alpha a) = 0,$$
$$AJ_0(\alpha b)+BY_0(\alpha b) = 0.$$

A, B を消去すれば，固有値方程式

$$J_0(\alpha a)Y_0(\alpha b)-Y_0(\alpha a)J_0(\alpha b) = 0 \qquad (6.27)$$

が得られる．この方程式も無限個の実根 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots$ をもっていることが知られている．これらの許される α の値に対して，A と B の間には

$$\frac{A}{B} = -\frac{Y_0(\alpha a)}{J_0(\alpha a)} = -\frac{Y_0(\alpha b)}{J_0(\alpha b)}$$

という関係が成り立たなければならない．それゆえ

$$R(\alpha r) = J_0(\alpha r)-\frac{J_0(\alpha a)}{Y_0(\alpha a)}Y_0(\alpha r) \qquad (6.28)$$

を得る．T_C は $e^{-\kappa\alpha^2 t}R(\alpha r)$ を，許される α の値に対して重ね合わせたもの

$$T_C = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\kappa\alpha_n{}^2 t}\left\{J_0(\alpha r)-\frac{J_0(\alpha a)}{Y_0(\alpha a)}Y_0(\alpha r)\right\} \qquad (6.29)$$

によって与えられる，ここに A_n は任意の定数である．

超越方程式 (6.27) の根 α_n に対応する $R(\alpha r)$ を $R(\alpha_n r)$ と表わせば，$R(\alpha_n r)$ は互いに直交していることが，$J_0(\alpha r)$ の直交関係と同じようにして示すことができる．$R_n(r)$ は $J_0(\alpha r)$ と同じ微分方程式を満足するから，

(6.18) と類似の関係

$$\left[r\left\{\frac{dR(\alpha r)}{dr}R(\beta r)-\frac{dR(\beta r)}{dr}R(\alpha r)\right\}\right]_{r=a}^{r=b}=(\beta^2-\alpha^2)\int_a^b rR(\alpha r)R(\beta r)dr \tag{6.30}$$

が成り立つことを容易に知ることができる．左辺は超越方程式 (6.27) のため 0 となる．したがって直交性の関係

$$\int_a^b rR(\alpha_n r)R(\alpha_m r)dr=0, \qquad \alpha_n \neq \alpha_m \tag{6.31}$$

が得られた．また関数 $R(\alpha_n r)$ のノルムは $\beta\to\alpha$ としたときの (6.30) の極限値から求めることができる．まず

$$\int_a^b rR^2(\alpha r)dr=\lim_{\beta\to\alpha}\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\Big[r\{\alpha R_n'(\alpha r)R(\beta r)-\beta R'(\beta r)R(\alpha r)\}\Big]_{r=a}^{r=b}.$$

右辺の分子・分母ともに 0 に近づくから，不定形の極限値を求める方法によって β について分子・分母を微分すれば

$$\lim_{\beta\to\alpha}\frac{1}{2\beta}\Big[r\{\alpha R'(\alpha r)rR'(\beta r)-R'(\beta r)R(\alpha r)-\beta rR''(\beta r)R(\alpha r)\}\Big]_{r=a}^{r=b}$$

となる，ここに ′ は引数についての微分を示す．(6.27) を考慮すればこれから

$$\int_a^b rR^2(\alpha_n r)dr=\frac{1}{2\alpha_n^2}\left[\left(r\frac{dR}{dr}\right)^2\right]_{r=a}^{r=b}$$

という結果を得る．右辺を計算すると

$$\left[\frac{dR(\alpha_n r)}{dr}\right]_{r=a}=\alpha_n\left[J_0'(\alpha_n a)-\frac{J_0(\alpha_n a)}{Y_0(\alpha_n a)}Y_0'(\alpha_n a)\right]$$

$$=\frac{\alpha_n}{Y_0(\alpha_n a)}[Y_0(\alpha_n a)J_0'(\alpha_n a)-J_0(\alpha_n a)Y_0'(\alpha_n a)].$$

ベッセル関数 J_0 と Y_0 のロンスキアン (2.48) を代入して

$$=-\frac{\alpha_n}{Y_0(\alpha_n a)}\cdot\frac{2}{\alpha_n a\pi}$$

となる．$r=b$ からの寄与も同様に計算できる．こうして

$$\int_a^b rR^2(\alpha_n r)dr=\frac{2}{\pi^2\alpha_n^2}\left[\frac{1}{Y_0^2(\alpha_n b)}-\frac{1}{Y_0^2(\alpha_n a)}\right]$$

$$=\frac{2}{\pi^2\alpha_n^2}\cdot\frac{J_0^2(\alpha_n a)-J_0^2(\alpha_n b)}{Y_0^2(\alpha_n b)J_0^2(\alpha_n a)} \qquad (6.32)$$

という結果が得られた.

6.2.6 中空な円柱に対する解の完全な表現　前節で得られた結果を使って，初期温度 $f(r)$ が与えられたときの解を陽に求めることができる．まず，$r=a,b$ で温度が 0 に保たれている場合を考えると，$T_S=0$ である．また (6.29) で $t=0$ とすれば

$$T_C(r,t=0)=f(r)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nR(\alpha_n r)$$

となるが，展開係数 A_n を直交性の関係 (6.31) と $R(\alpha_n r)$ のノルム (6.32) を用いて計算すれば

$$A_n=\frac{\pi^2\alpha_n^2}{2}\cdot\frac{Y_0^2(\alpha_n b)J_0^2(\alpha_n a)}{J_0^2(\alpha_n a)-J_0^2(\alpha_n b)}\int_a^b rf(r)\times$$

$$\times\left[J_0(\alpha_n r)-\frac{J_0(\alpha_n b)}{Y_0(\alpha_n b)}Y_0(\alpha_n r)\right]dr$$

となる．したがってこの場合の解はつぎのように書ける；

$r=a,b$ で温度は 0，初期温度分布 $f(r)$ のとき

$$T=\frac{\pi^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[Y_0(\alpha_n b)J_0(\alpha_n r)-J_0(\alpha_n b)Y_0(\alpha_n r)]e^{-\kappa\alpha_n^2 t}\alpha_n\times$$

$$\times\frac{J_0^2(\alpha_n a)}{J_0^2(\alpha_n a)-J_0^2(\alpha_n b)}\int_a^b rf(r)[Y_0(\alpha_n b)J_0(\alpha_n r)-J_0(\alpha_n b)Y_0(\alpha_n r)]dr. \qquad (6.33)$$

つぎに $r=a,b$ で温度が，T_1,T_2 に保たれているときは

$$T_C(r,t=0)=f(r)-T_S$$

であるから，初期温度が $f(r)-T_S$ で，$r=a,b$ で温度が 0 に保たれている場合と全く同じである．T_S は (6.11) で与えられるから，それを (6.33) に代入するとこの場合の温度の変化が計算できる．

6.2.7 表面で一定の熱流束がある場合　表面から一定の熱量が加えられている中心までつまった円柱内の温度変化を考えよう．与えられる熱流束を F_0 とすれば，円柱の表面での境界条件は明らかに

$$K\frac{\partial T}{\partial r} = F_0, \qquad r = b \tag{6.34}$$

である．この場合，0 でない $\alpha_0, \alpha_1, \cdots$ を用いて (6.15) の形の解を考えても，この境界条件を満足することはできない．$t \to +\infty$ のとき (6.15) の各項は 0 となるからである．しかし (6.15) は α の値が何であっても熱伝導方程式の解であるから，そこで形式的に $\alpha = 0$ に対応する項を求めて，それが上の境界条件を満たすようにしてみよう．まずそれを

$$Ae^{-\kappa\alpha^2 t}J_0(\alpha r)$$

として，指数関数とベッセル関数を無限級数に展開すれば

$$A\left[1-\kappa\alpha^2 t+\frac{1}{2}(\kappa\alpha^2 t)^2-\cdots\right]\left[1-\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^4-\cdots\right]$$

$$= A - A\left[\kappa\alpha^2 t+\frac{\alpha^2 r^2}{4}\right]+\cdots$$

となる，ここに $\cdots$ は α の高次の項を表している．定数は何であっても熱伝導の解となっているから除き，$-A\alpha^2$ を新しく A と書けば，これは

$$A(\kappa t+r^2/4)+\cdots$$

となり，ここで $\alpha \to 0$ とすれば高次の項は 0 となる．こうして一つの特殊解

$$A(\kappa t+r^2/4)$$

が得られる．これが一つの解であることは，(6.12)に代入して確めることもできる．したがってこの場合の一般解は

$$T = A\left(\kappa t+\frac{r^2}{4}\right)+\sum_{\alpha} A_\alpha e^{-\kappa\alpha^2 t}J_0(\alpha r)$$

で与えられる．α のとり得る値は境界条件を考慮して定められる．まずこの表式を (6.34) に代入すれば

$$\frac{Ab}{2}+\sum_{\alpha} A_\alpha e^{-\kappa\alpha^2 t}\alpha J_0'(\alpha b) = \frac{F_0}{K}$$

となるが，この関係が t の値とは無関係に成り立つためには

$$J_0'(\alpha b) = 0, \quad A = \frac{2F_0}{bK} \tag{6.35}$$

でなければならない．第一の関係から，許される α の値 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots$ が得られる．境界条件 (6.34) を満足する解はこうして

$$T=\frac{2F_0}{bK}\left(\kappa t+\frac{r^2}{4}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-\kappa\alpha_n{}^2 t}J_0(\alpha_n r)+B \qquad (6.36)$$

と書けることがわかった．ここに $A_0, A_1, \cdots,$ と B は任意の定数である．これらの定数は初期条件が与えられれば定まるから，ここでは初期温度が 0 である場合を例として考えよう．

(6.36) で $t=0$ とおいて，それを 0 に等しくすれば

$$-B-\frac{F_0}{2bK}r^2=\sum_{n=0}^{\infty}A_n J_0(\alpha_n r)$$

となる．まず B を求めるために両辺に r を掛けて積分すれば，右辺は

$$\int_0^b rJ_0(\alpha_n r)dr=\frac{b}{\alpha_n}J_1(\alpha_n b)$$

となり，これは (6.35) によって 0 となる．左辺を r 倍して積分すれば

$$-\frac{Bb^2}{2}-\frac{F_0}{2bK}\cdot\frac{b^4}{4}$$

となってこれが 0 であるためには

$$B=-\frac{F_0 b}{4K}$$

でなければならない．

つぎに関数系 $J_0(\alpha_0 r), J_0(\alpha_1 r), \cdots$ は互いに直交し，ノルムは (6.23) で $h=0$ とおいて得られることに注意すれば，係数 A_n は

$$A_n=-\frac{2}{b^2J_0{}^2(\alpha_n b)}\int_0^b\left[\frac{F_0 r^2}{2bK}+B\right]rJ_0(\alpha_n r)dr$$

によって与えられることが分かる．ところがベッセル関数の漸化式 (2.46) から

$$\frac{d}{dz}[z^\nu J_\nu(az)]=az^\nu J_{\nu-1}(az) \qquad (6.37)$$

という関係を示すことができるから，これを使って 2 回部分積分すれば

$$\int_a^b r^3J_0(\alpha_n r)dr=-\frac{2b^2}{\alpha_n{}^2}J_2(\alpha_n b)=+\frac{2b^2}{\alpha_n{}^2}J_0(\alpha_n b)$$

を得る．この積分とすでに定められた B の値を (6.36) に代入すれば

$$T=\frac{2F_0}{bK}\left(\kappa t+\frac{r^2}{4}\right)-\frac{F_0 b}{4K}-\frac{2F_0}{bK}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\kappa\alpha_n{}^2 t}\frac{J_0(\alpha_n r)}{\alpha_n{}^2J_0(\alpha_n b)} \qquad (6.38)$$

となる．これが求める結果である．

6.2.7 円柱表面での温度が z の関数であるときの定常分布 円柱内熱流のもっとも簡単な場合は前のいくつかの節で扱ったので，ここではより複雑な境界条件が課せられている場合を考えることにし，円柱表面の温度は θ には関係しないが，z の与えられた関数 $F(z)$ である場合の定常解を求めることにする．温度 T は (r, z) の関数となるが，z についてはフーリエ積分として表わす；

$$T(r, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(r, \omega) e^{i\omega z}\, d\omega. \tag{6.39}$$

この表現をラプラスの方程式に代入し，微分と積分の順序を交換すれば

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega z} \left[\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} - \omega^2 G \right] d\omega = 0$$

を得る．すべての z の値に対してこの関係が成り立つためには [ ] の中の表式が 0 でなくてはならない；

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} - \omega^2 G = 0.$$

この方程式は変形ベッセル関数の微分方程式 (2.34) で $\nu = 0$, $z = \alpha r$ としたものだから，一般解は $I_0(\omega r)$ と $K_0(\omega r)$ の 1 次結合である．$K_n(\omega r)$ は級数表示 (2.38) から分かるように $r = 0$ で特異点をもつから，考えている問題には不適当で除外される．したがって

$$G(r, \omega) = g(\omega) I_0(\omega r)$$

が求める G である，ただし $g(\omega)$ は ω のある関数であって，境界条件から関数形が定められる．まず (6.39) で $r = b$ とおけば，境界条件から

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\alpha) I_0(\alpha b) e^{i\omega z}\, d\omega = F(z)$$

という関係を得る．$F(z)$ をフーリエ積分

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega z} f(\omega) d\omega$$

として表わせば，明らかに

$$g(\omega) I_0(\omega b) = f(\omega)$$

が成り立たなければならない．したがって定常温度分布は

$$T(r, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega z} \frac{I_0(\omega r)}{I_0(\omega b)} f(\omega)\, d\omega$$

で与えられることになる．$f(\omega)$ は $F(z)$ のフーリエ逆変換

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\zeta} F(\zeta)\, d\zeta$$

によって与えられるから，上の表式を書き直せば

$$T(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\zeta)\, d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(z-\zeta)} \frac{I_0(\omega r)}{I_0(\omega b)}\, d\omega \qquad (6.40)$$

となる．ここに現われる第二の積分は陽に計算することができる．まず $z>\zeta$ と仮定して，図 6.1 にある経路に沿って関数

$$H(\omega) \equiv e^{i\omega(z-\zeta)} \frac{I_0(\omega r)}{I_0(\omega b)} = e^{i\omega(z-\zeta)} \frac{J_0(i\omega r)}{J_0(i\omega b)}$$

を積分する．ベッセル関数 $J_0(z)$ は z のすべての値に対して正則であるから，この関数 $H(\omega)$ は分母が 0 となる点を除いて正則である．分母が 0 となるのは超越方程式

$$J_0(\alpha b) = 0 \qquad \alpha > 0,$$

の根を $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$ としたとき，

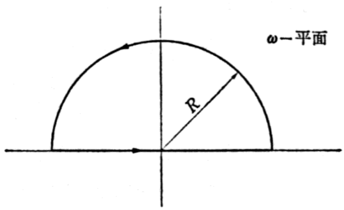


図 6.1　$H(\omega)$ の積分路

$\omega = -i\alpha_0, -i\alpha_1, -i\alpha_2, \cdots$　においてである．それらのうち積分路 C の内にあるものは $-i\alpha_0, \cdots -i\alpha_n$ とすれば，複素関数論の留数定理から

$$\int_C H(\omega)\, d\omega = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} [\omega = -i\alpha_k \text{ における } H(\omega) \text{ の留数}]$$

となる．C を直線部分 $(-R < \omega < R)$ と円弧 $\omega = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ に分けると

$$\int_C H(\omega)\, d\omega = \int_{-R}^{R} H(\omega)\, d\omega) + \int_{\text{円弧}} H(\omega)\, d\omega$$

となる．$R\to\infty$ のとき右辺の第二項は 0 に収束するので，けっきょく

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) = 2\pi i \sum_{k=0}^{\infty} [\omega = -i\alpha_k \text{ における } H(\omega) \text{ の留数}]$$

を得る．$H(\omega)$ の特異点 $\omega = -i\alpha_k$ はすべて一位の極であるから，留数は

$$\text{留数} = \lim_{\omega \to -i\alpha_k} (\omega + i\alpha_k) H(\omega)$$

から求められる．$\alpha_0, \alpha_1, \cdots$ は超越方程式の単純根であることを考えて，留数を計算すれば次の結果を得る；

$$\text{留数} = e^{-\alpha_k(z-\zeta)} \frac{J_0(\alpha_k r)}{ib\, J_0'(-\alpha_k b)}.$$

$J_0'(z) = J_1(z),\ J_1(-z) = -J_1(z)$ を用いると，けっきょく

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)\, d\omega = \frac{2\pi}{b} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha_k(z-\zeta)} \frac{J_0(\alpha_k r)}{J_1(\alpha_k b)}$$

を得る．$z < \zeta$ のときは半径 R の円の下半分と ω の実数軸で作られる積分路を考え，$R \to \infty$ とすれば半円からの積分への寄与は 0 になることが示されるから，この場合をも含めるには上の等式で指数関数部を $\exp\{-|z-\zeta|\alpha_k\}$ で置き換えておくとよい．この結果を使えば (6.40) は

$$T(r, z) = \frac{1}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_k r)}{J_1(\alpha_k b)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha_k|z-\zeta|} F(\zeta)\, d\zeta \qquad (6.41)$$

となる．つぎに $R \to \infty$ のとき円弧 $\omega = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi,\ z > \zeta)$ からの積分への寄与は 0 となることを示しておこう．

ベッセル関数の漸近展開は (2.78) から

$$J_n(z) = (2/\pi z)^{1/2} \left\{ \cos\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right)[1 + O(z^{-1})] + \frac{1}{2z} \sin\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right)[1 + O(z^{-1})] \right\}, \quad |\arg(z)| < \pi$$

で与えられる．したがって $H(\omega)$ の漸近形は

$$H(\omega) \approx e^{i\omega(z-\zeta)} \left(\frac{b}{r}\right)^{1/2} \left\{ \frac{\cos(i\omega r - \pi/4 - n\pi/2)}{\cos(i\omega b - \pi/4 - n\pi/2)} \right\}, \qquad |\arg(i\omega)| < \pi$$

となる．円弧 $\omega = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ 上ではこれは

$$H(Re^{i\theta}) \approx \left(\frac{b}{r}\right)^{1/2} e^{R(z-\zeta)(-\sin\theta + i\cos\theta)}\, e^{(r-b)R|\cos\theta|}$$

となる．ところが

$$\left| \int_{\text{円弧}} H(\omega)\, d\omega \right| = \left| \int_0^{\pi} d\theta\, Rie^{i\theta} H(Re^{i\theta}) d\theta \right| \leq \pi \cdot \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} \left| R\, H(Re^{i\theta}) \right|$$

という不等式が成り立つ．$R \to \infty$ のとき右辺の関数は明らかに 0 に収束す

る．したがって円弧に沿っての積分は $R\to\infty$ のとき 0 に収束する．

温度分布を与える表式 (6.41) で $F(z)$ の関数形が簡単な場合には積分を陽に求めることができる．まず $F(z)=1$ の場合には，定常分布 $T(r,z)=1$ となる．他方，右辺の定積分は $2/\alpha_k$ となるから

$$1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2J_0(\alpha_k r)}{J_1(\alpha_k b)\alpha_k b} \tag{6.42}$$

という結果が得られる．つぎに $F(z)=\sin qz$ $(q>0)$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\zeta)\,e^{-\alpha_k|z-\zeta|}\,d\zeta=\sin qz\cdot\frac{2\alpha_k}{\alpha_k{}^2+q^2}$$

であるから，(6.41) から定常分布は

$$T(r,z)=\frac{2}{b}\sin qz\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_k r)}{J_1(\alpha_k b)}\cdot\frac{\alpha_k}{q^2+\alpha_k{}^2}$$

で与えられる．特に興味があるのは

$$F(z)=\begin{cases}T_0 & z>0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

の時である．この $F(z)$ に対しては (6.41) の積分は

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(\zeta)\,e^{-\alpha_k|z-\zeta|}\,d\zeta=T_0\left\{\int_0^z+\int_z^{\infty}\right\}e^{-\alpha_k|z-\zeta|}\,d\zeta=\begin{cases}T_0\left(\dfrac{2}{\alpha_k}-\dfrac{e^{-\alpha_k|z|}}{\alpha_k}\right), & z>0\\ T_0\dfrac{e^{-\alpha_k|z|}}{\alpha_k} & ,z<0\end{cases}$$

のように計算される．したがって

$$T(r,z)=\frac{T_0}{2}\pm T_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_k r)}{J_1(\alpha_k b)\alpha_k b}(1-e^{-\alpha_k|z|}),\qquad z\gtrless 0$$

によって定常温度分布は与えられる．

6.3　無限媒質中の熱の流れ

6.3.1　無限媒質中に熱源のある場合の定常分布　いままでは無限円柱内の熱の流れについて述べたが，それ以外の形をもつ媒質中での熱流の問題でも，円柱座標で表わせる境界での条件が与えられている時には，解をベッセル関数を用いて求めることができる場合がある．そのような問題のもっとも簡単な場合として，無限媒質中に円板熱源があるときの定常分布を求める問題を考えてみよう．熱源 Q があるときの定常分布は偏微分方程式

$$K\nabla^2 T + Q = 0 \tag{6.43}$$

の解として与えられる．この方程式はポテンシャルを与えるポアッソンの方程式と同形であることにまず注意する．熱源 Q が曲面 S 上にのみあるとき，その曲面の微小な部分を囲む体積にガウスの定理を用いればポテンシャル論の（5.27）の代りに

$$\frac{\partial T_1}{\partial n} - \frac{\partial T_2}{\partial n} = -\frac{\sigma}{K} \tag{6.44}$$

という関係が得られる，ここに σ は単位面積あたりの熱源の強さであり，$\partial/\partial n$ はその曲面の法線（2 から 1 への方向を正にとる）方向の微分を示す．無限な拡がりをもつ一様な媒質中に有限な熱源があるとき，その定常分布は（6.43）で与えられ，しかも温度は無限遠で有限な値を取らねばならないから，温度分布 T はポテンシャルと同じ方程式と同じ境界条件を満たすことになる．したがって無限な拡がりをもつ媒質中の温度分布はポテンシャル論の問題に帰着され，相違はポアッソン方程式の右辺（$4\pi\rho$）が熱源の強さ $-Q$ を熱伝導係数で割ったもので置き換えられるだけである．

いま無限媒質中に半径 a の円板状熱源が一定である場合を考えると，定常温度分布とポテンシャルとの類似から，定常温度分布は一定な面密度をもつ円板のポテンシャルと同じ関数として表わされることが分かる．この問題はすでに 5.2.3 項でルジャンドル関数を用いて考えたが，ここでは円柱座標 (r, θ, z) を用いて解を求めてみよう．z 軸は円板の中心を通り，円板は平面 $z=0$ 内にあるものとする．

熱源のないところでは温度 T はラプラス方程式（6.8）を満足する．T は θ に依存しないから

$$T = R(r)\,Z(z)$$

と変数分離すれば，R と Z は方程式

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \lambda^2 Z = 0, \qquad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0$$

の解でなければならない，ただし λ^2 は分離の定数である．$R(r)$ の一般解は $J_0(\lambda r)$ と $Y_0(\lambda r)$ の 1 次結合であるが，$r=0$ で解は発散してはならないから $J_0(\lambda r)$ のみが許される．また $r\to\infty$ のとき $J_0(\lambda r)$ が有限であるとい

う条件から，λ は実数でなければならない．(便宜上，$\lambda>0$ としておく)．また $|z|\to\infty$ のとき Z は有限であるから，Z として $\exp(-\lambda|z|)$ を得る．一般解は $e^{-\lambda|z|}J_0(\lambda r)$ を λ について重ね合わせて得られるから，それを

$$T(r,z)=\int_0^\infty e^{-\lambda|z|}J_0(\lambda r)f(\lambda)\,d\lambda \tag{6.45}$$

と表わせる，ここに $f(\lambda)$ は λ の任意関数である．$f(\lambda)$ の関数形は $z=0$ での条件を用いて定めることができる．まず (6.44) から

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0}=-\int_0^\infty \lambda f(\lambda)J_0(\lambda r)\,d\lambda=\begin{cases}-\dfrac{\sigma}{2K} & r<a\\ 0 & r>a\end{cases}$$

という積分方程式を得る．両辺に $J_0(\mu r)r$ を掛けて r について積分すれば

$$\int_0^\infty \lambda f(\lambda)\,d\lambda\int_0^\infty J_0(\lambda r)J_0(\mu r)r\,dr=\frac{\sigma}{2K}\int_0^a J_0(\mu r)r\,dr$$

となるが，左辺はハンケルの定理 (2.18) によって $f(\mu)$ である．また右辺は (6.37) を使って計算すれば $(\sigma/2K)[aJ_1(\mu a)/\mu]$ である．こうして

$$f(\lambda)=\frac{\sigma a}{2K}\cdot\frac{J_1(\lambda a)}{\lambda}$$

を得る．したがって温度分布は

$$T(r,z)=\frac{\sigma a}{2K}\cdot\int_0^\infty e^{-\lambda|z|}J_0(\lambda r)J_1(\lambda a)\frac{d\lambda}{\lambda}$$

となる．またこれから積分公式

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r)J_1(\lambda a)d\lambda=\begin{cases}1/a & 0<r<a\\ 0 & r>a\end{cases} \tag{6.46}$$

が得られる．

(6.45) の形をもつ温度分布の一つに，円板 $r<a$, $z=0$ で温度が一定 (T_0) に保たれている場合がある．$z=0$, $r>a$ では温度 $T=0$ とすれば (6.45) から

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r)f(\lambda)\,d\lambda=\begin{cases}T_0 & r<a\\ 0 & r>a\end{cases}$$

であるから，前の場合と同じようにして

$$f(\lambda)=T_0a\frac{J_1(\lambda a)}{\lambda}$$

が得られる.

つぎに $0<r<a,\ z=0$ は一定の温度に保たれるが, $r>a,\ z=0$ は熱の絶縁体となっている場合を考える. この場合も $z \neq 0$ では温度分布は (6.45) で与えられるが, 境界条件は

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda f(\lambda) J_0(\lambda r)\, d\lambda &= 0, & r>1 \\ \int_0^\infty f(\lambda) J_0(\lambda r)\, d\lambda &= T_0, & 0<r<1 \end{aligned}\right\} \tag{6.47}$$

となる, ただし便宜のため円板の半径 $a=1$ とした. この問題を一般化して T_0 が r の関数であるときの解はメリン変換を用いてティッチュマーシュによって求められた. メリン変換は種々の問題に応用されるので, その理論の概要をここで説明しておこう.

6.3.2 メリン変換 $(0, \infty)$ で定義された関数 $f(x)$ に対して積分

$$\int_0^\infty f(x) x^{s-1}\, dx \tag{6·48}$$

が存在するとき, これを $f(x)$ のメリン (Mellin) 変換とよんで $\mathfrak{F}(s)$ で表わす. いくつかの初等関数のメリン変換を求めてみると

1. $f(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$

$$\mathfrak{F}(s) = \int_0^1 x^n\, x^{s-1}\, dx = \frac{1}{n+s}.$$

この積分は $R(n)+R(s)>0$ のときにのみ存在するから, $\mathfrak{F}(s)$ は $R(s)>-R(n)$ で定義された関数である.

2. $f(x)=(1+ax)^{-n}$ のとき (1.6) を用いると

$$\mathfrak{F}(s) = \int_0^\infty x^{s-1}(1+\alpha x)^{-n}\, dx = a^{-s} B(s, n-s)$$

を得る. 積分は $R(s)>0,\ R(n)>R(s)$ のときに存在する.

3. $f(x)=e^{-ax}, \qquad a>0$

$$\mathfrak{F}(s) = \int_0^\infty e^{-ax}\, x^{s-1}\, dx = a^{-s}\Gamma(s), \qquad R(s)>0.$$

4. $f(x)=e^{ix}$

このとき図 6.2 に示された積分路に沿って

$$g(z) = z^{s-1}\, e^{iz}, \qquad 0 < \boldsymbol{R}(s) < 1$$

を積分すれば，$g(z)$はこの積分路の内部で正則であるから，コーシーの定理によって

$$\int_{|z|=\varepsilon} g(z)\, dz + \int_{|z|=R} g(z)dz + \int_{\varepsilon}^{R} x^{s-1}\, e^{ix}\, dx + e^{\pi is/2}\int_{R}^{\varepsilon} y^{s-1}\, e^{-y}\, dy = 0$$

が成り立つ．$\varepsilon\to 0$, $R\to\infty$ のとき第一項と第二項はそれぞれ 0 に収束するから

$$\int_0^{\infty} x^{s-1}\, e^{ix}\, dx = e^{\pi is/2}\int_0^{\infty} y^{s-1}\, e^{-y}\, dy = e^{\pi is/2}\,\Gamma(s)$$

を得る．両辺の実数部と虚数部を比較すれば

$$f(x) = \cos x, \quad \mathscr{F}(s) = \Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}$$

$$f(x) = \sin x, \quad \mathscr{F}(s) = \Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2}$$

となる．第二の関係では明らかに $-1 < \boldsymbol{R}(s) < 1$ にまで，$\mathscr{F}(s)$ の存在する範囲を拡張することができる．

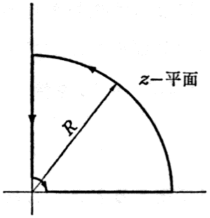


図 6.　メリン変換を求めるための積分路

5.　$f(x) = J_\nu(x)$

$$\mathscr{F}(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1}\, J_\nu(x)\, dx, \qquad -\nu < \boldsymbol{R}(s) \leq 1.$$

この積分を計算するためにベッセル関数の積分表示（*2.18*）を使う．積分順序を交換すれば上の積分は

$$\int_0^{\infty} x^{s-1}\, J_\nu(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^1 t^{\nu-1/2}(1-t)^{-1/2}\, dt\times$$

$$\times\int_0^{\infty} x^{s-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\cos[x(1-t)^{1/2}]\,dx$$

となる．$f(x) = \cos x$ のメリン変換を用いればxに関する積分は計算できる；

$$\int_0^{\infty} x^{s-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\cos[x(1-t)^{1/2}]\,dx = 2^{-\nu}(1-t)^{-(\nu+s)/2}\,\Gamma(\nu+s)\cos\frac{\nu+s}{2}\pi,$$

$$0 < \boldsymbol{R}(\nu+s) < 1.$$

ところが（*1.4*），（*1.9*）から

$$\int_0^1 t^{\nu-1/2}(1-t)^{-(\nu+s)/2-1/2}\,dt = \frac{\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(-\nu/2-s/2+1/2)}{\Gamma(\nu/2-s/2+1)}$$

であるから，これを上の積分に代入して

$$\int_0^\infty x^{s-1} J_\nu(x)\,dx = \frac{\Gamma(-\nu/2-s/2+1/2)}{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu/2-s/2+1)}\Gamma(\nu+s)\cos\frac{\nu+s}{2}\pi$$

$$= \frac{2^{s-1}\Gamma(\nu/2+s/2)}{\Gamma(\nu/2-s/2+1)},\quad 0<\mathbf{R}(\nu+s)<1 \qquad (6.49)$$

という結果が得られる．これを書き直せば

$$\int_0^\infty x^{s-1} J_{-\nu}(x)\,dx = \frac{2^{s-1}\Gamma(s/2-\nu/2)}{\Gamma(1-s/2-\nu/2)}$$

となる．したがって第二種ベッセル関数の定義 (*2.8*) からそれのメリン変換は

$$\int_0^\infty x^{s-1} Y_\nu(x)\,dx = \frac{2^{s-1}}{\sin\nu\pi}\left\{\cos\nu\pi\frac{\Gamma(\nu/2+s/2)}{\Gamma(\nu/2-s/2+1)} - \frac{\Gamma(s/2-\nu/2)}{\Gamma(1-s/2-\nu/2)}\right\}$$

となる．(*1.14*) を使って右辺を変形すれば

$$\frac{2^{s-1}}{\pi\sin\nu\pi}\Gamma\left(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}\right)\left\{\cos\nu\pi\sin\pi\left(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}\right)-\sin\pi\left(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}\right)\right\}$$

となるから

$$\int_0^\infty x^{s-1} Y_\nu(x)\,dx = -2^{s-1}\pi^{-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}\right)\cos\pi\left(\frac{\nu}{2}-\frac{s}{2}\right)$$

を得る．これと (*6.49*) とから

$$\int_0^\infty x^{s-1} H_\nu^{(1)}(x)\,dx = 2^{s-1}\pi^{-1}\Gamma(\nu/2+s/2)\,\Gamma(s/2-\nu/2)\,e^{\pi i(s/2-\nu/2+3/2)} \qquad (6.50)$$

という結果もただちに求まる．この積分公式は前節の問題を考える時に重要となってくる．

つぎに $\mathfrak{F}(s)$ が与えられているとき，それに対応するもとの関数 $f(x)$ を求めることを考える．$f(x)$ は $\mathfrak{F}(s)$ の逆変換とよばれている．フーリエの積分公式

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega x}G(\omega)\,d\omega,\quad G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{+i\omega x}g(x)\,dx$$

で $\xi = e^x$, $s = c+i\omega$ (c は実数) と形式的におけば

$$G\left(\frac{s-c}{i}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty g(\log\xi)\,\xi^{s-c-1}\,d\xi,$$

$$g(\log\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}G\left(\frac{s-c}{i}\right)\xi^{c-s}\,ds$$

という関係を得る．ここで

$$f(x)=(2\pi)^{-1/2}\,x^{-c}\,g(\log x),\quad \mathcal{F}(s)=G\left(\frac{s-c}{i}\right)$$

と変数変換すれば上の関係は

$$\mathcal{F}(s)=\int_0^\infty f(x)\,x^{s-1}\,dx,\quad f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathcal{F}(s)\,x^{-s}\,ds \quad (6.51)$$

と表わすことができる．最初の積分は $f(x)$ のメリン変換 $\mathcal{F}(s)$ を与え，あとの関係は $\mathcal{F}(s)$ から逆変換 $f(x)$ を与える．

つぎに $f(x)$, $g(x)$ のメリン変換をそれぞれ $\mathcal{F}(s)$, $\mathcal{G}(s)$ として，$f(x)\cdot g(x)$ のメリン変換を考えると，(6.51) を用いて積分順序を変えればつぎのようになる；

$$\int_0^\infty f(x)\,g(x)\,x^{s-1}\,dx=\int_0^\infty g(x)\,x^{s-1}\,dx\,\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathcal{F}(\sigma)\,x^{-\sigma}\,d\sigma$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathcal{F}(\sigma)\,d\sigma\int_0^\infty g(x)\,x^{s-\sigma-1}\,dx.$$

これは書き直すと

$$\int_0^\infty f(x)\,g(x)\,x^{s-1}\,dx=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathcal{F}(\sigma)\,\mathcal{G}(s-\sigma)\,d\sigma \quad (6.52)$$

となる．これはメリン変換のたたみこみ公式とよばれている重要な関係である．

6.3.3　メリン変換による (6.47) の解　メリン変換を応用して境界値問題 (6.47) の解を求めてみよう．まず (6.49) から得られる関係

$$\int_0^\infty x^{s-1}\,J_\nu(ax)\,dx=a^{-s}\frac{2^{s-1}\,\Gamma(\nu/2+s/2)}{\Gamma(\nu/2-s/2+1)},\qquad a>0$$

に注意する．$f(\lambda)$ のメリン変換を $\mathcal{F}(s)$ とすれば (6.47) の最初の関係はたたみこみ公式 (6.51) を使えば

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathcal{F}(s)\,r^{s-2}\,\frac{2^{1-s}\,\Gamma(1-s/2)}{\Gamma(s/2)}\,ds=0,\qquad r>1$$

となる．第二の関係も同じようにして

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathscr{F}(s)\,r^{s-1}\frac{2^{-s}\Gamma(1/2-s/2)}{\Gamma(1/2+s/2)}ds=T_0,\qquad 0<r<1$$

となる．$J_0(x)$ のメリン変換は $0<R(s)<1$ で存在するから，上の積分で c は $0<c<1$ の値でなければならない．いま $\mathscr{F}(s)$ のかわりに

$$\mathscr{F}(s)=\frac{2^s\Gamma(s/2)}{\Gamma(1/2-s/2)}\mathscr{X}(s)$$

によって新しい関数 $\mathscr{X}(s)$ を定義すると上の二つの等式は

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathscr{X}(s)\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma(1/2+s/2)}r^{s-1}ds&=T_0,\quad 0<r<1\\ \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathscr{X}(s)\cdot\frac{\Gamma(1-s/2)}{\Gamma(1/2-s/2)}r^{s-2}ds&=0,\qquad r>1\end{aligned}\right\}\qquad(6.53)$$

と書ける．ガンマ関数はその引数が 0 または負の整数値以外では特異点(極)を持たない．またそれは 0 になることはないから，(6.52) の二つのガンマ関数の商の部分は $R(s)>0$ では極も零点も持たない．同じ理由で (6.53) に現れる二つのガンマ関数の商は $R(s)<1$ では極も零点も持たない．いま $c>R(w)$ である w を選んで (6.52) に r^{-w} を掛けて (0, 1) で積分すれば

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathscr{X}(s)\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma(1/2+s/2)}\cdot\frac{ds}{s-w}=\frac{T_0}{1-w},\quad R(w)<R(s)$$

となる．さて $\mathscr{F}(s)$ は $0<R(s)<c<1$ で正則であると仮定すれば，同じ領域で $\mathscr{X}(s)$ は正則である．したがって図 6.3 に示されたように積分路を変形すれば上の等式は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty}\mathscr{X}(s)\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma(1/2+s/2)}\cdot\frac{ds}{s-w}=-\mathscr{X}(w)\frac{\Gamma(w/2)}{\Gamma(1/2+w/2)}+\frac{T_0}{1-w}$$

となる．左辺の積分は $R(w)<c'$ で正則な関数であり，c' は任意の正数であるから，それは $R(w)>0$ で w の正則な関数である．右辺もしたがって同じ領域で正則関数である．$\Gamma(1/2+w/2)/\Gamma(w/2)$ はその領域で正則であるから

$$\mathscr{X}(w)-\frac{T_0}{1-w}\cdot\frac{\Gamma(1/2+w/2)}{\Gamma(w/2)}$$

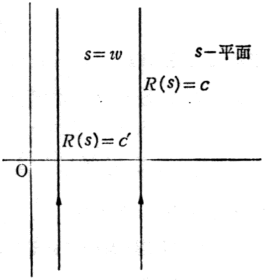


図 6.3

も w の正則関数である．ここで w の代りに s とおいた関数を $(s-w)$ で割ったものは $\boldsymbol{R}(s)>0$ では $s=w$ を除いて正則である．$\boldsymbol{R}(w)<c$ である限り，この関数は直線 $s=c$ と $s=0$ に中心のある半径 R の円の右側で囲まれた領域の内部に特異点を持たない．いま $R\to\infty$ のとき半円部分からの積分は 0 に収束すると仮定すれば，コーシーの定理から

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left\{\mathscr{X}(s)-\frac{T_0}{1-s}\cdot\frac{\Gamma(1/2+s/2)}{\Gamma(s/2)}\right\}\frac{ds}{s-w}=0,\quad \boldsymbol{R}(w)<c \tag{6.54}$$

という関係を得る．同じようにして (6.53) からつぎの関係が求められる；

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\mathscr{X}(s)}{s-w}ds=\mathscr{X}(w),\qquad \boldsymbol{R}(w)<c.$$

したがって $\mathscr{X}(w)$ は

$$\mathscr{X}(w)=\frac{T_0}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(1/2+s/2)\,ds}{(1-s)(s-w)\Gamma(s/2)},\qquad \boldsymbol{R}(w)<c$$

となる．ここでまた直線 $s=c$ と，中心 $s=0$，半径 R の円の右半分で囲まれた領域を考えれば，被積分関数は $s=1$ で一位の極をもつのみで，しかも半円に沿っての積分は $R\to\infty$ のとき 0 となるから，留数定理により

$$\mathscr{X}(w)=T_0\cdot\frac{\Gamma(1)}{(1-w)\Gamma(1/2)}=\frac{T_0}{\sqrt{\pi}(1-w)}$$

という結果を得る．したがって $\mathscr{F}(s)$ は

$$\mathscr{F}(s)=\frac{2^s\Gamma(s/2)}{\Gamma(1/2-s/2)}\cdot\frac{T_0}{\sqrt{\pi}(1-s)}=\frac{2T_0}{\pi}\Gamma(s-1)\sin\frac{\pi(s-1)}{2}$$

となり，これを $\sin x$ のメリン変換と比較すると

$$f(x)=2T_0\sin x/\pi x$$

であることがわかる．この $\mathscr{F}(s)$ は仮定した解析的性質をもっているから求める解である．この結果を (6.45) に代入すれば温度分布は

$$T(r,z)=\frac{2T_0}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda|z|}J_0(\lambda r)\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda \tag{6.55}$$

によって与えられる．

6.3.4 無限媒質中にある円柱表面の温度が与えられている場合　地中に埋めてある円筒状の管の温度が与えられているとき，その周囲の温度分布は無限

媒質中に無限に長い円柱があるときの温度分布によって近似できる．その円柱の中心軸を z 軸にとり，円柱の半径を b，その表面温度は時間 t の与えられた関数とすれば，温度分布は

$$\frac{1}{\kappa}\cdot\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r},\quad r>b,\quad T(b,t)=f(t),\quad t>0 \qquad (6.56)$$

の解として与えられる．初期条件としては $T(r,0)=0$ としておこう．

まず温度 $T(r,t)$ は t について指数位の関数と仮定する，云い換えれば

$$T(r,t)\leq Ae^{ct},\qquad r>b,\ t>0$$

である定数 A, c が存在するとする．そうすれば $T(r,t)$ のフーリエ変換

$$\tilde{T}(r,\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty T(r,t)\,e^{i\omega t}\,dt \qquad (6.57)$$

は $I(\omega)>c$ なる領域で存在する．(6.56) の両辺のフーリエ変換をとれば

$$\kappa\left(\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial r}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{i\omega t}\frac{\partial T}{\partial t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[Te^{i\omega t}\Big]_0^\infty-i\omega\tilde{T}\ (r,\omega)$$

となるが，$I(\omega)>c$ と仮定しているから右辺の第一項は 0 となる．したがって一般解は A, B を ω の任意関数として

$$\tilde{T}(r,\omega)=A\,H_0^{(1)}(r\sqrt{i\omega/\kappa})+B\,H_0^{(2)}(r\sqrt{i\omega/\kappa}) \qquad (6.58)$$

のように表わせる．ところが (6.56) の逆変換を求めるときに，$r\to\infty$ で温度は有限という条件から $B=0$ でなければならないことがわかる．また

$$\tilde{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(t)\,e^{i\omega t}\,dt,\qquad I(\omega)>c'$$

とすれば，境界条件 (6.56) から

$$A(\omega)\,H_0^{(1)}(b\sqrt{i\omega/\kappa})=\tilde{f}(\omega)$$

でなければならない．したがって

$$\tilde{T}(r,\omega)=\tilde{f}(\omega)\cdot\frac{H_0^{(1)}(r\sqrt{i\omega/\kappa})}{H_0^{(1)}(b\sqrt{i\omega/\kappa})} \qquad (6.59)$$

という結果を得る．(6.59) の逆変換はつぎのようにして求められる．$f(t)$ は指数位の関数であると仮定して，フーリエの積分公式 (6.3.2 項) で

$$g(t)=0,\qquad t<0$$
$$g(t)=f(t)\,e^{-ct},\qquad t\geq 0$$

とおけば

$$\hat{f}(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\omega t} f(t)\, dt = G(\omega - ic) \qquad (6.60)$$

となって $G(\omega-ci)$ は $I(\omega)>c$ で存在する．これを積分公式に代入すると

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} G(\omega)\, d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \hat{f}(\omega + ic)\, d\omega$$

となるが，これは書き直せば

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ci-\infty}^{ci+\infty} e^{-i\omega t} \hat{f}(\omega)\, d\omega \qquad (6.61)$$

となる．したがって (6.59) の逆変換は

$$T(r,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ci-\infty}^{ci+\infty} \tilde{f}(\omega) \cdot \frac{H_0^{(1)}(r\sqrt{i\omega/\kappa})}{H_0^{(1)}(b\sqrt{i\omega/\kappa})} e^{-i\omega t}\, d\omega \qquad (6.62)$$

で与えられる．いま例として (6.56) で

$$f(t) = T_0, \qquad (T_0\text{: 定数})$$

の場合を考えると

$$\tilde{f}(\omega) = -\frac{T_0}{\sqrt{2\pi}\, i\omega}, \qquad I(\omega) > c$$

となる．図 6.4 に示された径路に沿って被積分関数の積分を考えると，内部に特異点をもたないから積分の値は 0 である．

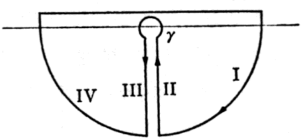


図 6.4

したがって被分積関数を $H(\omega)$ で表わせば

$$\int_{ci-\infty}^{ci+\infty} H(\omega)\, d\omega + \int_{\mathrm{I}} H(\omega)\, d\omega + \int_{\mathrm{II}} H(\omega)\, d\omega + \int_{\gamma} H(\omega)\, d\omega$$
$$+ \int_{\mathrm{III}} H(\omega)\, d\omega + \int_{\mathrm{IV}} H(\omega)\, d\omega = 0$$

が成り立つ．まず $\omega=0$ を中心とした半径 ε の円 γ に沿っての積分を考えると，そこでは

$$\omega = \varepsilon e^{i\theta} \qquad -\pi/2 < \theta < 3\pi/2$$

である．$|z| \ll 1$ のときハンケル関数は (2.12) によって

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z) \fallingdotseq \frac{2i}{\pi} \log \frac{z}{2} + \cdots$$

である，ここに… は定数項と z の高次の項を示す．そうすれば γ 上で

$$H(\omega)=-\frac{T_0}{2\pi i}\cdot(e^{-i\theta}/\varepsilon)\frac{1/2[\log\varepsilon+i\theta+\pi i/2]+\log(r/\sqrt{\kappa})+\cdots}{1/2[\log\varepsilon+i\theta+\pi i/2]+\log(b/\sqrt{\kappa})+\cdots}e^{-i\varepsilon(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

となる．$\varepsilon\to0$ の極限では $\log\varepsilon$ 以外の項は無視できる．したがって

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_\gamma H(\omega)\,d\omega=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}H(\varepsilon e^{i\theta})\,i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta=-T_0$$

となる．また Ⅰ，Ⅳ に沿っての積分は R(円弧の半径)$\to\infty$ のとき 0 に収束する．それで Ⅱ，Ⅲ に沿って考えると

$$\text{積分路 Ⅱ}\quad \omega=xe^{-\pi i/2},\qquad \varepsilon<x<R$$

であるから

$$\int_{\text{Ⅱ}}H(\omega)\,d\omega=-\frac{T_0}{2\pi i}\int_R^\varepsilon\frac{H_0^{(1)}(r\sqrt{x/\kappa})}{H_0^{(1)}(b\sqrt{x/\kappa})}e^{-xt}\frac{dx}{x}.$$

また

$$\text{積分路 Ⅲ}\qquad \omega=x\,e^{3\pi/2},\qquad \varepsilon<x<R$$

$$\int_{\text{Ⅲ}}H(\omega)\,d\omega=-\frac{T_0}{2\pi i}\cdot\int_\varepsilon^R\frac{H_0^{(1)}(e^{\pi i}r\sqrt{x/\kappa})}{H_0^{(1)}(e^{\pi i}b\sqrt{x/\kappa})}e^{-xt}\cdot\frac{dx}{x}$$

を得る．ところが一般の整数 m に対して (*2.50*), (*2.51*) を用いて

$$\left.\begin{aligned}H_\nu^{(1)}(ze^{m\pi i})&=e^{-m\nu\pi i}H_\nu^{(1)}(z)-2e^{-\nu\pi i}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}J_\nu(z)\\ H_\nu^{(2)}(ze^{m\pi i})&=e^{-m\nu\pi i}H_\nu^{(2)}(z)+2e^{\nu\pi i}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}J_\nu(z)\end{aligned}\right\}\qquad(6.63)$$

という関係を示すことができる．そうすると上の積分は

$$\int_{\text{Ⅲ}}H(\omega)\,d\omega=-\frac{T_0}{2\pi i}\cdot\int_\varepsilon^R\frac{iY_0(r\sqrt{x/\kappa})-J_0(r\sqrt{x/\kappa})}{iY_0(b\sqrt{x/\kappa})-J_0(b\sqrt{x/\kappa})}e^{-xt}\frac{dx}{x}$$

と表わせる．以上をまとめれば

$$T(r,z)=-\lim_{\varepsilon\to0}\int_\gamma H(\omega)\,d\omega-\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\R\to0}}\int_{\text{Ⅱ}+\text{Ⅳ}}H(\omega)\,d\omega$$

$$=T_0+\frac{T_0}{\pi}\int_0^\infty e^{-xt}\frac{J_0(r\sqrt{x/\kappa})Y_0(b\sqrt{x/\kappa})-J_0(b\sqrt{x/\kappa})Y_0(r\sqrt{x/\kappa})}{J_0^2(b\sqrt{x/\kappa})+Y_0^2(b\sqrt{x/\kappa})}\cdot\frac{dx}{x}$$

を得る．積分変数の変換によってこれは

$$T(r,z)=T_0+\frac{2T_0}{\pi}\int_0^\infty e^{-\kappa u^2t}\frac{J_0(ur)Y_0(ub)-J_0(ub)Y_0(ur)}{J_0^2(bu)+Y_0^2(bu)}\frac{du}{u}\qquad(6.64)$$

と表すことができる．この解は最初ニコルソンによって求められた．

つぎに円柱の表面温度が

$$f(t)=0, \qquad t<0$$

$$f(t)=T_0 \sin pt, \qquad t>0,\ (p>0)$$

の場合を考える．この $f(t)$ に対しては

$$\tilde{f}(\omega)=\frac{pT_0}{\sqrt{2\pi}(p^2-\omega^2)}, \qquad I(\omega)>0$$

であるから，これを (6.62) に代入すると温度分布は

$$T(r,t)=\frac{T_0}{2\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{p}{p^2-\omega^2}\cdot\frac{H_0^{(1)}(r\sqrt{i\omega/\kappa})}{H_0^{(1)}(b\sqrt{i\omega/\kappa})}e^{-i\omega t}\,d\omega$$

となる．この積分を計算するために被積分関数 $H(\omega)$ を図 6.4 の経路に沿って積分すれば，まえと同様に γ に沿っての積分は $\varepsilon\to 0$ のとき，I，IV に沿っての積分は $R\to\infty$ のとき 0 となる．他方 $H(\omega)$ はこの積分路の内に二つの極 $\omega=\pm p$ をもつから，$H(\omega)$ のそれらの極での留数をも考慮すると

$$T(r,t)=\frac{T_0 i}{2}\cdot\frac{H_0^{(1)}(r\sqrt{ip/\kappa})}{H_0^{(1)}(b\sqrt{ip/\kappa})}e^{-ipt}-\frac{T_0 i}{2}\cdot\frac{H_0^{(1)}(r\sqrt{-ip/\kappa})}{H_0^{(1)}(b\sqrt{-ip/\kappa})}\cdot e^{ipt}$$
$$+\frac{iT_0}{2\pi}\int_0^\infty\frac{pe^{-xt}}{p^2+x^2}\left\{-\frac{H_0^{(1)}(r\sqrt{x/\kappa})}{H_0^{(1)}(b\sqrt{x/\kappa})}+\frac{H_0^{(1)}(e^{\pi i}r\sqrt{x/\kappa})}{H_0^{(1)}(e^{\pi i}b\sqrt{x/\kappa})}\right\}dx \tag{6.65}$$

となる．定積分の項は (6.63) を用い，また積分変数の変換をすれば

$$\frac{2\kappa T_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{pe^{-u^2\kappa t}}{p^2+\kappa^2u^4}\cdot\frac{J_0(bu)Y_0(ru)-Y_0(bu)J_0(ru)}{J_0^2(bu)+Y_0^2(bu)}\cdot u\,du$$

となる．この項は $t\to\infty$ のとき 0 となる．最初の二項は円柱表面の温度が周期的に変化することによる媒質温度の応答を表わしている．いま

$$J_0(ze^{\pm 3\pi i/4})=\mathrm{ber}\,z\pm i\,\mathrm{bei}\,z \tag{6.66}$$

によって ber z, bei z を定義する．第一種ベッセル関数の定義 (2.7)

$$J_0(ze^{3\pi i/4})=1-\frac{1}{1!^2}\left(\frac{z}{2}\right)^2e^{3\pi i/2}+\frac{1}{2!^2}\left(\frac{z}{2}\right)^4e^{3\pi i}-\frac{1}{3!^2}\left(\frac{z}{2}\right)^6e^{9\pi i/2}+\cdots$$

と (6.66) を比較すれば，これら二つの関数の級数表示

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{ber}\,z&=1-\frac{1}{2!^2}\left(\frac{z}{2}\right)^4+\frac{1}{4!^2}\left(\frac{z}{2}\right)^8-\cdots\\ \mathrm{bei}\,z&=\frac{1}{1!^2}\left(\frac{z}{2}\right)^2-\frac{1}{3!^2}\left(\frac{z}{2}\right)^6+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{6.67}$$

が得られる．z が実数のとき，ber, bei ともに実数である．同じように

$$\left.\begin{aligned} H_0^{(1)}(ze^{\pm 3\pi i/4}) &= \mathrm{her}\, z \pm i\, \mathrm{hei}\, z \\ K_0(ze^{\pm \pi i/4}) &= \mathrm{ker}\, z \pm i\, \mathrm{kei}\, z \end{aligned}\right\} \tag{6.68}$$

とおけば，z が実数のとき四つの関数 her, hei, ker, kei は実数値をとる．さてハンケル関数と変形ベッセル関数の関係（2.43）を用いると（6.65）のハンケル関数を含む項はつぎのように変形される；

$$\frac{H_0^{(1)}(r\sqrt{ip/\kappa})}{H_0^{(1)}(b\sqrt{ip/\kappa})} = \frac{K_0(e^{-\pi i/4} r\sqrt{p/\kappa})}{K_0(e^{-\pi i/4} b\sqrt{p/\kappa})}, \quad \frac{H_0^{(1)}(r\sqrt{-ip/\kappa})}{H_0^{(1)}(b\sqrt{-ip/\kappa})} = \frac{K_0(e^{\pi i/4} r\sqrt{p/\kappa})}{K_0(e^{\pi i/4} b\sqrt{p/\kappa})}.$$

したがって（6.65）の第一項と第二項を加えたものは $r\sqrt{p/\kappa}$ と $b\sqrt{p/\kappa}$ を引数とした ker, kei 関数で表わすことができる．とくに興味あるのは $b^2 p > \kappa$ での温度の振舞である．このときハンケル関数の漸近展開（2.76）によって，（6.65）の最初の二項の和は近似的に

$$T_0\sqrt{\frac{b}{r}} \cdot \exp\left[-\sqrt{\frac{p}{2\kappa}}(r-b)\right] \cdot \sin\left[pt - \sqrt{\frac{p}{2\kappa}}(r-b)\right]$$

で与えられる．これから温度応答は r が増加すると振幅が急激に減少し，また振動の位相が r の増加とともに遅れることを示している．とくに $p \to \infty$ の極限では温度変化の起こるのは円柱表面 $r = b$ の近傍だけに限られる．この現象は表皮効果とよばれている．

6.4 くさびの中の熱伝導

6.4.1 無限に長いくさびの中の温度分布 断面がくさび形をしている媒質内の熱伝導を考えよう．その最も簡単な場合として，無限に長いくさびの中の定常分布を求めてみる．くさびの先端を z 軸とする円柱座標 (r, θ, z) をとり，温度は z に依存しないとすれば，定常温度分布 $T(r, \theta)$ は方程式

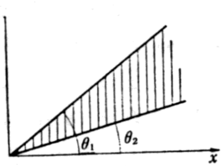


図 6.5 くさび

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0,$$

$$r > 0,\ \theta_1 < \theta < \theta_2 \tag{6.69}$$

の解となっている．いま解を求めるために

$$\mathscr{T}(s,\theta)=\int_0^\infty r^{s-1}\,T(r,\theta)\,dr$$

によって $T(r,\theta)$ のメリン変換を定義すれば

$$\int_0^\infty r^{s+1}\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right\}dr=s^2\mathscr{T}(s,\theta)$$

となる，ただし $r^{s+1}\partial T/\partial r$, Tr^s はともに $r\to 0$, $r\to\infty$ のとき 0 になると仮定した．したがって (6.69) に r^{s-1} を掛けて積分したものは

$$\frac{\partial^2\mathscr{T}}{\partial\theta^2}+s^2\mathscr{T}=0$$

となり，これの一般解は

$$\mathscr{T}(s,\theta)=A(s)\cos s\theta+B(s)\sin s\theta$$

となる．くさびの頂角は 2α ($\theta_1=-\alpha$, $\theta_2=\alpha$) で，$\theta=\pm\alpha$ で温度は与えられているとする；

$$T(r,\theta)=f(r),\quad \theta=\pm\alpha,\qquad r>0.$$

$f(r)$ のメリン変換を $\mathscr{F}(s)$ で表わせば $A(s)=\mathscr{F}(s)/\cos s\alpha$ となるから，逆変換の公式 (6.54) によって，温度分布は

$$T(r,\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\mathscr{F}(s)\cos s\theta}{\cos s\alpha}r^{-s}\,ds \tag{6.70}$$

となる．一例として

$$f(r)=T_0(a^2+r^2)^{-1},\qquad a>0$$

を考えれば，よく知られた積分公式

$$\int_0^\infty\frac{x^{s-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin\pi s},\qquad 0<R(s)<1$$

によって，$f(r)$ のメリン変換は

$$\mathscr{F}(s)=(T_0/2)a^{s-2}\pi\,\mathrm{cosec}(\pi s/2),\qquad 0<R(s)<2$$

となり，これを (6.70) に代入して

$$T(r,\theta)=\frac{T_0}{2a^2 i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^s\frac{\cos s\theta}{\cos\alpha s\cdot\sin(\pi s/2)}\,ds$$

を得る．$f(r)$のメリン変換は $0<R(s)<2$ でのみ存在するから，$0<c<2$ である．この積分の値を計算するにはまず $r<a$ と仮定し，直線 $R(s)=c$ と，中心 $s=0$，半径 R の円の左半分からなる積分路を考え，それに沿っ

て上の被積分関数を積分する．半円に沿っての積分は $R\to\infty$ の極限で 0 となるから，留数定理によって，上の積分の値は積分路の内にある留数総和の $2\pi i$ 倍に等しい．被積分関数の極は

$$s_n = -2n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

と

$$s_m' = -(\pi/\alpha)(m+1/2), \qquad m = 0, 1, 2, \cdots$$

である．α は π の無理数倍と仮定すれば，s_n と s_m' が一致することはない．これらの極における留数を計算すれば（定常）温度分布は

$$T(r,\theta) = \frac{2T_0}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 2n\theta}{\cos 2n\alpha}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n} - \frac{\pi T_0}{a^2\alpha}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\cos[(m+1/2)\pi\theta/\alpha]}{\sin[\pi^2(m+1/2)/2\alpha]}\left(\frac{r}{a}\right)^{(\pi/\alpha)(m+1/2)} \tag{6.71}$$

によって与えられる．$r>a$ のときも同様に計算できる．

6.4.2 くさび内部の非定常問題　くさび内の非定常問題を考えよう．温度が時間 t と座標 (r,θ) にのみ依存すれば，熱伝導の方程式は

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}\right)$$

である．変数分離によりこの方程式の一つの特殊解は λ, p を任意定数として

$$e^{-\kappa\lambda^2 t}J_p(\lambda r)\begin{Bmatrix}\cos p\theta\\ \sin p\theta\end{Bmatrix}$$

であることが容易にわかる．したがって一般解はこれを p と λ について重ね合わせたもの

$$T(r,\theta,t) = \sum_{p,\lambda} e^{-\kappa\lambda^2 t}J_p(\lambda r)[A_p(\lambda)\cos p\theta + B_p(\lambda)\sin p\theta] \tag{6.72}$$

である．いまもっとも簡単な場合

$$T = T_0, \qquad t = 0$$

$$T = 0, \qquad \theta = \theta_1 = -\alpha,\ \theta = \theta_2 = \alpha,\ t > 0$$

を考えよう．$\theta = \pm\alpha$ における境界条件も初期条件も $\theta = 0$ に関して対称であるから，$B_p(\lambda) = 0$ であることはただちにわかる．また境界条件から

$$p\alpha = \pi(m+1/2), \qquad m = 0, 1, 2, \cdots$$

でなければならない．したがって (6.72) は書き直して

$$T(r,\theta,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\cos\left[\frac{\pi\theta}{\alpha}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]\int_0^{\infty}e^{-\kappa\lambda^2t}A_p(\lambda)J_p(\lambda r)\,\lambda d\lambda,$$

$$p=\frac{\pi}{\alpha}\left(m+\frac{1}{2}\right)$$

となる．ここで初期条件は

$$T_0=\sum_{m=0}^{\infty}\cos\left[\frac{\pi\theta}{\alpha}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]\int_0^{\infty}A_p(\lambda)J_p(\lambda r)\,\lambda d\lambda,\quad p=\frac{\pi}{\alpha}\left(m+\frac{1}{2}\right)$$

であることに注意してハンケルの積分公式（2.18）を用いると形式的に

$$\sum_{m=0}^{\infty}\cos\left[\frac{\pi\theta}{\alpha}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]A_p(\lambda)=T_0\int_0^{\infty}J_p(\lambda r)\,rdr$$

を得る．ところが

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\left[\frac{\pi\theta}{\alpha}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]\cos\left[\frac{\pi\theta}{\alpha}\left(m'+\frac{1}{2}\right)\right]d\theta=\begin{cases}\alpha\\0,\quad m\neq m'\end{cases}$$

であるから，上の関係から

$$A_p(\lambda)=\frac{2\alpha(-1)^mT_0}{\pi(m+1/2)}\int_0^{\infty}J_p(\lambda r)\,rdr,\qquad m=0,1,\cdots$$

によって $A_p(\lambda)$ が定まる．これを用いて温度変化は

$$T(r,\theta,t)=\frac{2\alpha T_0}{\pi}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m+1/2}\cdot\cos\left[\frac{\pi\theta}{\alpha}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]\times$$
$$\times\int_0^{\infty}\rho d\rho\int_0^{\infty}J_p(\lambda\rho)J_p(\lambda r)e^{-\kappa\lambda^2t}\,\lambda d\lambda$$

となる．ところが

$$\int_0^{\infty}J_p(\lambda\rho)J_p(\lambda r)e^{-\kappa\lambda^2t}\,\lambda d\lambda=\frac{1}{2\kappa t}\exp\left[-\frac{\rho^2+r^2}{4\kappa t}\right]I_p\left(\frac{\rho r}{2\kappa t}\right)$$

という関係を示すことができる．（Watson 参照）．これを使えばこの結果は

$$\left.\begin{aligned}T(r,\theta,t)&=\frac{T_0}{\kappa t}\cdot\frac{\alpha}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m+1/2}\cos\left[\frac{\pi\theta}{\alpha}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]\times\\&\times\int_0^{\infty}e^{-(\rho^2+r^2)/4\kappa t}I_p\left(\frac{\rho r}{2\kappa t}\right)\rho d\rho,\\&\qquad p=\pi(m+1/2)/\alpha\end{aligned}\right\}\tag{6.73}$$

のように変形できる．

6.5 球内部の熱伝導

6.5.1 熱源がない場合の熱の流れ 半径 b の一様な球をとりその内部での熱伝導を考えよう．球の中心を原点にとり，球座標 (r, θ, φ) [(3.3) を見よ.] を使えば熱伝導の方程式は

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \cot\theta\frac{\partial^2 T}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}\right)\right\} = 0 \tag{6.74}$$

と書ける．この方程式の特殊解を求めるために

$$T = R(r)\, P_n{}^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{Bmatrix} e^{-\kappa\lambda^2 t}$$

と仮定する．ルジャンドルの倍関数 $P_n{}^m(\cos\theta)$ の満足する微分方程式 (3.44) を用いると，関数 $\mathrm{R}(r)$ は方程式

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2}R = -\lambda^2 R \tag{6.75}$$

の解でなければならないことが分かる．ここで変数の変換

$$\lambda r = x, \qquad R(x) = v(x)x^{-1/2}$$

を行えば (6.75) はつぎのように変形される；

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dv}{dx} + \left[1 - \frac{(n+1/2)^2}{x^2}\right]v = 0$$

この方程式は $(n+1/2)$ 次のベッセルの微分方程式に他ならない．$n+1/2$ は半整数であるから，この方程式の二つの独立な解は $J_{n+1/2}(x)$, $J_{-n-1/2}(x)$ である．しかし $J_{-n-1/2}(x)$ は $x=0$ で特異点をもつから，球の中心で無限大の温度を与えることになるので除外されねばならない．したがって $J_{n+1/2}(x)$ のみが許される解である．こうして特殊解は

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda r}} J_{n+1/2}(\lambda r)\, P_n{}^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{Bmatrix} \tag{6.76}$$

で与えられ，一般解はこれを λ, m, n に関して重ね合わせて得られる．

6.5.2 半整数次のベッセル関数 このように半整数次のベッセル関数は球内の熱伝導の解として現われるが，くさび内部の問題にも半整数次の変形ベッセル関数が現われる．6.4.2 項で論じた問題で $\alpha = \pi$ のときがそれである．一般の次数の場合と異なり，半整数次のベッセル関数は一般に初等関数

を用いて表現することができることをここでは示そう．

まず第一種ベッセル関数 $J_\nu(z)$ の定義 (2.7) で $\nu=1/2$ とすれば

$$J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{z}{2}}\left\{\frac{1}{\Gamma(3/2)}-\frac{1}{\Gamma(5/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\frac{1}{2\cdot\Gamma(7/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^4-\cdots\right\}$$

であるが，引数の値が半整数であるガンマ関数の値は (1.10) によって与えられることに注意すると

$$J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2z}{\pi}}\left\{1-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots\right\}=\sqrt{\frac{2z}{\pi}}\cdot\frac{\sin z}{z}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z \qquad (6.77)$$

となる．同様にして

$$J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z$$

を導くことができる．他の半整数次のベッセル関数は漸化式 (2.22) を用いて逐次求めることができる．半整数次の変形ベッセル関数は

$$I_\nu(z)=e^{-\nu\pi i/2}J_\nu(iz)$$

から得られる．とくに $\nu=\pm1/2$ とおけば

$$I_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sinh z,\quad I_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cosh z \qquad (6.78)$$

を得る．$J_{n+1/2}(z)/\sqrt{z}$ 等は n 次の球ベッセル関数とよばれる．

6.5.3　球表面で $T=0$ の場合の解　　考えている熱伝導の球は表面 $r=b$ で温度が 0 に保たれているとする．特殊解 (6.76) にこの境界条件を用いれば

$$J_{n+1/2}(\lambda b)=0$$

が得られる．この超越方程式は無限個の（正の）実根 $\lambda_{n+1/2,0}$, $\lambda_{n+1/2,1}$, $\lambda_{n+1/2,2}$, … をもつ．したがって (6.74) の解は

$$T(r,\theta,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\kappa\lambda^2{}_{n+1/2,k}t}\frac{J_{n+1/2}(\lambda_{n+1/2,k}r)}{\sqrt{\lambda_{n+1/2,k}r}}P_n{}^m(\cos\theta)$$
$$\times\{A_{n,k,m}\cos m\varphi+B_{n,k,m}\sin m\varphi\} \qquad (6.79)$$

で与えられる，ここに $A_{n,k,m}$, $B_{n,k,m}$ は任意定数である．初期 $(t=0)$ の温度分布は $f(r,\theta,\varphi)$ であったとすると，三角関数の直交性，ルジャンドル倍関数の直交性とベッセル関数の直交性を用いて，定数 $A_{n,k,m}$, $B_{n,k,m}$ はつぎのように与えられる；

$$\left.\begin{aligned}A_{n,k,m}&=\frac{(2n+1)(n-m)!}{\pi(n+m)!}\cdot\frac{\lambda_{n+1/2,k}{}^{1/2}}{b^2[J_{n+1/2}{}'(\lambda_{n+1/2,k}b)]^2}\\&\quad\times\int_0^b r^{3/2}\,dr\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}f(r,\theta,\varphi)\cos m\varphi\,d\varphi\\B_{n,k,m}&=\frac{(2n+1)(n-m)!}{\pi(n+m)!}\cdot\frac{\lambda_{n+1/2,k}{}^{1/2}}{b^2[J_{n+1/2}{}'(\lambda_{n+1/2,k}b)]^2}\\&\quad\times\int_0^b r^{3/2}\,dr\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}f(r,\theta,\varphi)\sin m\varphi\,d\varphi\end{aligned}\right\}\qquad(6.80)$$

ただし $m=0$ のとき係数 $A_{n,k,m}$ の分母は2倍するものとする.

6.6 円錐内の熱の流れ

6.6.1 円錐内の定常分布　球内の熱伝導に対する解法を少し変形すれば,円錐内の熱伝導に応用することができる. 円錐の軸を z 軸にとり, 頂点を原点とする球座標 (r,θ,φ) を用いれば円錐は

$$0\leq r<\infty,\qquad 0\leq\theta\leq\theta_0$$

で与えられる. まず定常状態から求めよう. 温度分布は φ に無関係とすれば, $T(r,\theta)$ はラプラスの方程式

$$\frac{\partial^2T}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2T}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)=0$$

の解である. $T(r,\theta)$ のメリン変換を

$$\mathscr{T}(s,\theta)=\int_0^\infty r^{s-1}\,T(r,\theta)\,dr$$

とすれば, ラプラス方程式に r^2 を掛けたもののメリン変換をとると

$$s(s-1)\mathscr{T}(s,\theta)+\frac{\partial^2\mathscr{T}}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial\mathscr{T}}{\partial\theta}=0$$

となる. これはルジャンドルの微分方程式(3.13)で n のかわりに $s-1$ とおいたものに他ならない. ゆえに $\mathscr{T}(s,\theta)=A(s)P_{s-1}(\cos\theta)$ である $(Q_{s-1}(\cos\theta)$ も一つの解であるが $\cos\theta=1$ での特異点をもつため除かれる). 円錐の表面 $\theta=\theta_0$ で温度分布 $T(r,\theta_0)=f(r)$ が与えられていると

$$A(s)\ P_{s-1}(\cos\theta_0)=\mathscr{F}(s)$$

によって $A(s)$ は定まる, ここに $\mathscr{F}(s)$ は $f(r)$ のメリン変換である. 定常温度分布は逆変換の公式 (6.51) から

$$T(r,\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathscr{F}(s)\frac{P_{s-1}(\cos\theta)}{P_{s-1}(\cos\theta_0)}r^{-s}\,ds \qquad (6.81)$$

によって与えられる．いま簡単な例として

$$f(r)=\begin{cases}T_0, & 0<r<a\\ 0, & r>a\end{cases}$$

を考えると $f(r)$ のメリン変換は

$$\mathscr{F}(s)=T_0a^s/s, \qquad R(s)>0$$

である．したがって温度分布は

$$T(r,\theta)=\frac{T_0}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^s\frac{P_{s-1}(\cos\theta)}{sP_{s-1}(\cos\theta_0)}ds$$

となる．$\mathscr{F}(s)$ は $R(s)>0$ で存在するから $c>0$ ととっておく必要がある．さて $P_s(\cos\theta)$ はその級数表示 (3.24) から明らかなように s の正則な関数である．だから上の被積分関数の特異点は $s=0$ と超越方程式

$$P_{s-1}(\cos\theta_0)=0 \qquad (6.82)$$

の根である．この方程式は $0\leq s\leq 1/2$ で根を持たないと仮定すれば，上の積分路を変形して $R(c)=1/2$ ととることができる．

よって

$$T(r,\theta)=\frac{T_0}{2\pi i}\int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^s\frac{P_{s-1}(\cos\theta)}{sP_{s-1}(\cos\theta_0)}ds.$$

ここで

$$s=1/2+i\sigma, \qquad -\infty<\sigma<+\infty$$

と置けば，この積分はつぎのように変形できる；

$$T(r,\theta)=\frac{T_0}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{1/2+i\sigma}\frac{P_{-1/2+i\sigma}(\cos\theta)}{P_{-1/2+i\sigma}(\cos\theta_0)}\cdot\frac{d\sigma}{i\sigma+1/2}$$

ところがルジャンドル関数の級数表示 (3.24) から

$$P_{-1/2+i\sigma}(\cos\theta)=1+\frac{1/4+\sigma^2}{1!^2}\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{(1/4+\sigma^2)(9/4+\sigma^2)}{(2!)^2}\sin^4\frac{\theta}{2}+\cdots \qquad (6.83)$$

となり，$P_{-1/2+i\sigma}(\cos\theta)$ は σ の実関数で，しかもそれの偶関数である．この性質を用いて上の積分を書き直せば

$$T(r,\theta)=\frac{T_0}{\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^{-1/2}\times$$
$$\times\int_0^\infty\frac{P_{-1/2+i\sigma}(\cos\theta)}{P_{-1/2+i\sigma}(\cos\theta_0)}\cdot\frac{\sigma\sin(\sigma\log a/r)+1/2\cdot\cos(\sigma\log a/r)}{\sigma^2+1/4}d\sigma$$

を得る．(*6.83*) で与えられるルジャンドル関数をメーラー (Mehler) の円錐関数とよぶことがある．

この議論で超越方程式 (*6.82*) は $0\leq s\leq 1/2$ で根を持たないと仮定したが，(*6.83*) を使って，このことを証明することができる．まず (*6.83*) は σ の値にかかわらずルジャンドル関数を与えるから，σ を実数に限る必要はない．いま

$$\sigma=ix,\qquad x\text{: 実数}$$

とおけば

$$P_{-1/2-x}(\cos\theta)=1+\frac{1/4-x^2}{(1!)^2}\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{(1/4-x^2)(9/4-x^2)}{(2!)^2}\sin^4\frac{\theta}{2}+\cdots$$

となるが，$x^2<1/4$ である限り各項は正であるから，$P_{-1/2-x}(\cos\theta)$ は 0 にはなり得ない．こうして $P_s(\cos\theta)=0$ は $-1<s<0$ に根を持たないことが証明された．

6.6.3 方程式 $P_\nu(\cos\theta)=0$ の根　超越方程式 (*6.82*) は円錐を扱う問題ではしばしば現われるので，その根の性質を調べておくのは適当であろう．まずルジャンドルの微分方程式 (*3.14*) で $n=\nu,\nu'$ とおいた方程式から

$$\frac{d}{d\zeta}\left\{(1-\zeta^2)\left(P_{\nu'}\frac{dP_\nu}{d\zeta}-P_\nu\frac{dP_{\nu'}}{d\zeta}\right)\right\}=[\nu'(\nu'+1)-\nu(\nu+1)]P_{\nu'}P_\nu$$

が得られる．これを $\zeta=\cos\theta$ から $\zeta=1$ まで積分すれば

$$(\nu'-\nu)(\nu'+\nu+1)\int_{\cos\theta}^1P_\nu(\zeta)P_{\nu'}(\zeta)d\zeta$$
$$=\sin^2\theta[P_\nu(\cos\theta)P_{\nu'}'(\cos\theta)-P_{\nu'}(\cos\theta)P_\nu'(\cos\theta)]\qquad(6.84)$$

を得る，ただし ′ は引数についての微分を示す．したがって $\cos\theta$ が与えられたとき，超越方程式 (*6.82*) の異る二根を $s=\nu,\nu'$ とすれば右辺は 0 となる．したがって

$$\nu+\nu'+1=0\quad\text{または}\quad\int_{\cos\theta}^1P_\nu(\zeta)P_{\nu'}(\zeta)d\zeta=0$$

のどちらかが成り立つ．まず第二の関係から考える．級数表示 (*3.24*) から明らかなように ν が一根であれば，それの複素共役もまた根である．ν が複素数と仮定して，それの複素共役数 ν' をとれば，ζ が実数のとき $P_{\nu'}(\zeta)$ は $P_\nu(\zeta)$ の複素共役であるから，$P_\nu(\zeta)P_{\nu'}(\zeta)$ は正である．したがって上の積分は 0 とはなり得ない．つぎに第一の関係について考えると，ν と ν' を複素共役にとれば　$R(\nu)=-1/2$　でなければならない．ところがこのとき (*6.83*) から見られるように，どのような σ （実数） に対しても，$P_{-1/2+i\sigma}(\cos\theta)$ は 0 とはならない．云い換えれば，複素数の ν に対しては上の関係のどちらも満足されない．したがって超越方程式 (*6.82*) の根はすべて実数である．同じようにして超越方程式

$$P_s{}^m(\cos\theta)=0, \qquad (m:\ \text{正整数}) \tag{6.85}$$

の根はすべて実数であることを示すことができる．

つぎに超越方程式 (*6.82*), (*6.85*) の根の個数について考えると，ルジャンドル関数の漸近形 (*3.62*) は $n=$ 整数，$m\ll n$ という仮定で導いた．しかしそれは n が実数ではない場合にも拡張することができる（参考文献 Hobson を参照）;

$$P_\nu{}^m(\cos\theta)\sim\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu+1)}\cdot\left(\frac{2}{\nu\pi\sin\theta}\right)^{1/2}\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right],$$
$$|\nu\ \text{の偏角}|\leq\pi-\varepsilon,\ \varepsilon>0. \tag{6.86}$$

したがって ν が実数軸に沿って増加するとき，この関数は $(0,\infty)$ で無限回符号を変える．よって，超越方程式 (*6.85*) は無限個の根をもっている．

6.6.3　円錐内部の非定常問題　円錐内の温度変化の一例として，$t\leq 0$ で $T=f(r,\theta)$ である円錐の表面を $t>0$ で温度 0 にした場合を考えよう．くさび内部の場合と同じように考えれば，この問題に対する一般解は

$$T(r,\theta,t)=\sum_\nu\int_0^\infty A_\nu(\lambda)e^{-\kappa\lambda^2t}J_{\nu+1/2}(\lambda r)(\lambda r)^{-1/2}P_\nu(\cos\theta)\,d\lambda \tag{6.87}$$

によって与えられる，ただし $A_\nu(\lambda)$ は初期条件と境界条件によって定められる関数である．ベッセル関数 $J_{\nu+1/2}(\lambda r)$ は $r=0$ の近傍では $(\lambda r)^{\nu+1/2}$ に比例するから，$T(r,\theta,t)$ が有限であるためには $R(\nu)>0$ でなければならない．また境界条件から，ν は超越方程式 (*6.82*) の根でなければならな

い．それらを $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \cdots$ で表わし，それらについての総和を $\sum\limits_{\nu}$ で示すことにする．(6.87) で $t=0$ とすれば

$$\sum_{\nu}\int_0^{\infty} A_{\nu}(\lambda)J_{\nu+1/2}(\lambda r)(\lambda r)^{-1/2}P_{\nu}(\cos\theta)\,d\lambda = f(r,\theta)$$

となるが，(6.84) から

$$\int_{\cos\theta_0}^{1} P_{\nu}(\zeta)P_{\nu'}(\zeta)\,d\zeta = 0, \qquad \nu \neq \nu'$$

が成り立つので，この直交性の関係を用いると上の等式から

$$\int_0^{\infty} d\lambda A_{\nu}(\lambda)N_{\nu}J_{\nu+1/2}(\lambda r)(\lambda r)^{-1/2} = \int_0^{\theta_0} f(r,\theta)\,P_{\nu}(\cos\theta)\sin\theta\cdot d\theta,$$

$$N_{\nu} \equiv \int_{\cos\theta_0}^{1} P_{\nu}^{2}(\zeta)\,d\zeta$$

が得られる．$\nu>0$ であるから，ハンケルの積分公式 (2.18) を使えば

$$A_{\nu}(\lambda)\,N_{\nu} = \int_0^{\infty}(\lambda r)^{3/2}J_{\nu+1/2}(\lambda r)\,dr\int_0^{\theta_0} f(r,\theta)\,P_{\nu}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

によって $A_{\nu}(\lambda)$ が与えられる．これを (6.87) に代入し，積分公式 (6.72) を使えば

$$T(r,\theta,t) = \sum_{\nu}\frac{P_{\nu}(\cos\theta)}{N_{\nu}}\int_0^{\infty}\frac{\rho^2\,d\rho}{2\kappa t\sqrt{r\rho}}e^{-(r^2+\rho^2)/4\kappa t}I_{\nu+1/2}\left(\frac{\rho r}{2\kappa t}\right)\times$$
$$\times\int_0^{\theta_0} f(\rho,\theta')\,P_{\nu}(\cos\theta')\sin\theta'\,d\theta' \tag{6.88}$$

となる，ただし総和は (6.82) の正根 $\nu_0, \nu_1, \cdots$ についてである．

6.6.4 ベッセル関数を含む定積分　ここではベッセル関数を含むいくつかの定積分の値を求めよう．まずリプシッツ (Lipschitz) の積分

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}J_0(bx)\,dx, \qquad \boldsymbol{R}(a)>0,\ \boldsymbol{R}(a\pm ib)>0$$

を考える．積分表示 (2.14) を用いればこの積分は

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}J_0(bx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-ax}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ibx\cos t}\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{a-ib\cos t} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{6.89}$$

となる．つぎにこの両辺を b について微分すれば

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_1(bx)\, x\, dx = \frac{b}{(a^2+b^2)^{3/2}}$$

となり，n 回微分して

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_n(bx)\, x^n\, dx = \frac{(2b)^n\,\Gamma(n+1/2)}{(a^2+b^2)^{n+1/2}\sqrt{\pi}} \tag{6.90}$$

という積分公式を得る．またこの両辺を a について微分して

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_n(bx)\, x^{n+1}\, dx = \frac{2a(2b)^n\,\Gamma(n+3/2)}{(a^2+b^2)^{n+3/2}\sqrt{\pi}} \tag{6.91}$$

を得る．つぎに (6.55) に現われる積分

$$\int_0^\infty J_0(ax)\frac{\sin x}{x}\,dx$$

を考える．$0<a<1$ のときの積分の値は (6.55) と (6.47) を比較すれば $\pi/2$ であることがわかる．$a>1$ での値を求めるためふたたびベッセル関数の積分表示 (2.14) を用いるとこの積分は

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi dt\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\left[\cos(ax\cos t)+i\sin(ax\cos t)\right]dx$$

となる．ところが λ, μ を正数としたとき

$$\int_0^\infty \frac{\sin\lambda x\sin\mu x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}\right|;$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\lambda x\cos\mu x}{x}\,dx = \begin{cases}\pi/2, & 0<\mu<\lambda\\ 0, & 0<\lambda<\mu\end{cases}$$

であるから，上の積分は

$$\int_{\cos^{-1}(1/a)}^{\pi/2} dt + \frac{i}{2\pi}\int_0^\pi \log\left|\frac{a\cos t+1}{a\cos t-1}\right|dt$$

となるが，第二の積分は 0 となる．また最初の項は $\sin^{-1}(1/a)$ であるから

$$\int_0^\infty J_0(ax)\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx = \begin{cases}\pi/2, & 0<a<1\\ \sin^{-1}(1/a), & a>1\end{cases} \tag{6.92}$$

という結果を得る．

また

$$I_{\mu,\nu} = \int_0^\infty e^{-ax^2} J_\nu(bx)\, x^\mu\, dx, \qquad a, b>0,\ \boldsymbol{R}(\mu+\nu)>-1 \tag{6.93}$$

の形の積分も多くの問題に現われる．ガンマ関数を使って表わせる積分

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\, x^{\alpha+\mu}\, dx = \frac{1}{2}\cdot a^{-(\alpha+\mu+1)/2}\, \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\mu}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

に注意すれば上の積分は

$$I_{\mu,\nu} = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\, \Gamma(m+\mu/2+\nu/2+1/2)}{m!\, \Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{b}{2}\right)^{2m+\nu} a^{-m-\nu/2-\mu/2-1/2}$$

となる．これの特種な場合として $\mu=\nu+1$ とすれば

$$I_{\nu+1,\nu} = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^{2m+\nu} a^{-\nu/2-1} = \frac{b^\nu}{(2a)^{\nu+1}}\, e^{-b^2/4a} \qquad (6.94)$$

が得られる．また $\mu=0,\ \nu=1$ とすれば

$$I_{0,1} = \frac{1}{b}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+1)!}\cdot\left(\frac{b^2}{4a}\right)^{m+1} = \frac{1}{b}(1-e^{-b^2/4a}) \qquad (6.95)$$

となる．これらの結果を使えばつぎの積分も計算できる；

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} J_2(bx)\, x\, dx = \int_0^\infty e^{-ax^2} \left\{\frac{2}{bx} J_1(bx) - J_0(bx)\right\} x\, dx$$

$$= \frac{2}{b^2}(1-e^{-b^2/4a}) - \frac{1}{2a}\, e^{-b^2/4a}.$$

つぎにメリン変換を応用して得られる積分を考えよう．まず $g(x) = (x^2+1)^{-\mu-1}$ のメリン変換とベータ関数の積分表示 (*1.6*) から

$$\mathcal{G}(s) = \int_0^\infty x^{s-1}(x^2+1)^{-\mu-1}\, dx = \frac{\Gamma(s/2)\Gamma(\mu+1-s/2)}{2\Gamma(\mu+1)},$$

$$\boldsymbol{R}(s),\ \boldsymbol{R}(\mu+1-s/2) > 0$$

となる．また (*6.49*) から

$$f(x) = x^{\nu+1} J_\nu(ax), \quad \mathcal{F}(s) = 2^{s+\nu}\, a^{-s-\nu-1}\, \frac{\Gamma(\nu+s/2+1/2)}{\Gamma(1/2-s/2)},$$

$$0 < \boldsymbol{R}(2\nu+1+s) < 1$$

である．メリン変換のたたみこみ公式 (*6.52*) に代入し $s=1$ とおけば

$$\int_0^\infty \frac{x^{\nu+1} J_\nu(ax)}{(x^2+1)^{\mu+1}}\, dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 2^{s+\nu}\, a^{-s-\nu-1}\, \frac{\Gamma(\nu+s/2+1/2)}{\Gamma(1/2-s/2)}$$

$$\times \frac{\Gamma(1/2-s/2)\Gamma(\mu+1+s/2-1/2)}{2\Gamma(\mu+1)}\, ds$$

を得る．$\mathcal{F}(s)$, $\mathcal{G}(s)$ の存在範囲から，$1 > c > -1-2\mu$, $-2\nu-2 < c < -\nu-1$ でなければならない．$0<\nu<2\mu$ であれば，このような c は存在

する．いま右辺で

$$s = s' - 2\nu - 1$$

とすれば，求める積分は

$$\frac{1}{4\pi i\Gamma(\mu+1)}\int_{c+2\nu+1-i\infty}^{c+2\nu+1-i\infty} 2^{s'-\nu-1}\, a^{-s'+\nu}\, \Gamma(s'/2)\Gamma(s'/2+\mu-\nu)\, ds'$$

となる．これはハンケル関数のメリン変換（6.50）を使えば変形ベッセル関数で表わし得ることがわかる．$z^{s-1}H_\nu^{(1)}(z)$ を $(0, +\infty)$，第一象限にある円弧，$(i\infty, 0)$ からなる閉曲線に沿って積分し，円弧の半径を無限に大きくすれば

$$\int_0^\infty H_\nu^{(1)}(x)\, x^{\nu+s-1}\, dx = e^{i(\nu+s)\pi/2}\int_0^\infty H_\nu^{(1)}(ix)\, x^{\nu+s-1}\, dx$$

$$= \frac{2e^{is\pi/2}}{\pi i}\int_0^\infty K_\nu(x)\, x^{\nu+s-1}\, dx$$

となるから，$K_\nu(x)x^\nu$ のメリン変換は $2^{s+\nu-2}\Gamma(s/2)\Gamma(\nu+s/2)$ である．逆変換を与える等式（6.51）で $f(x) = x^\nu K_\nu(x)$ とおけば

$$x^\nu K_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 2^{s+\nu-2}\, \Gamma(s/2)\Gamma(\nu+s/2) x^{-s}\, ds$$

が成り立つ．これを求めている積分と比較すると

$$\int_0^\infty \frac{x^{\nu+1} J_\nu(ax)}{(x^2+1)^{\mu+1}}\, dx = \frac{a^\mu K_{\mu-\nu}(a)}{2^\mu \Gamma(\mu+1)}, \qquad -1 < \nu < 2\mu+3/2 \quad (6.96)$$

という結果を得る．

つぎにメリン変換の組

$$f(x) = x^b(1-x)^{a-1}, \qquad 0 < x < 1, \quad \mathscr{F}(s) = \frac{\Gamma(b+s)\Gamma(a)}{\Gamma(a+b+s)}$$

$$= 0, \qquad x > 1,$$

$$g(x) = x^{b'}(1-x)^{a'-1}, \qquad 0 < x < 1, \quad \mathscr{G}(s) = \frac{\Gamma(b'+s)\Gamma(a')}{L(a'+b'+s)}$$

$$= 0, \qquad x > 1$$

を考える．そうすれば $f(x)\cdot g(x)$ のメリン変換の $s=1$ での値は

$$\int_0^1 (1-x)^{a+a'-2}\, x^{b+b'}\, dx = \frac{\Gamma(a+a'-1)\Gamma(b+b'+1)}{\Gamma(a+a'+b+b')}$$

で与えられるが，一方たたみこみ定理によってこれは

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(b+\sigma)\Gamma(a)}{\Gamma(a+b+\sigma)}\cdot\frac{\Gamma(b'+1-\sigma)\Gamma(a')}{\Gamma(a'+b'+1-\sigma)}\,d\sigma$$

に等しい．ここで $a=\beta-\alpha,\ b=\alpha,\ a'=\delta-\gamma,\ b'=\gamma-1$ とおけば

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\gamma-s)}{\Gamma(\beta+s)\Gamma(\delta-s)}\,ds=\frac{\Gamma(\beta+\delta-\alpha-\gamma-1)\Gamma(\alpha+\gamma)}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\delta-\gamma)\Gamma(\beta+\delta-1)},$$

$$c>-\alpha,\ -\beta;\ c<\gamma,\delta$$

という関係を得る．これを応用してベッセル関数を含む積分のいくつかを計算することができる．まず $\cos x$ のメリン変換はガンマ関数の倍法公式から

$$\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}=\sqrt{\pi}\,2^{s-1}\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma(1/2-s/2)}$$

と表わせることに注意すれば

$$\int_0^\infty x^{s-1}\cos x\,J_\nu(x)\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\,2^{s-2}}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(\sigma/2)\Gamma(\nu/2+s/2-\sigma/2)}{\Gamma(1/2-\sigma/2)\Gamma(\nu/2+\sigma/2-s/2+1)}\,d\sigma$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\,2^{s-1}\,\Gamma(\nu/2+s/2)\Gamma(1/2-s)}{\Gamma(\nu/2-s/2+1)\Gamma(1/2-\nu/2-s/2)\Gamma(\nu/2-s/2+1/2)}$$

という結果を得る．同じようにすれば

$$\int_0^\infty x^{s-1}\sin x\,J_\nu(x)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}\,2^{s-1}\,\Gamma(s/2+\nu/2+1/2)\Gamma(1/2-s)}{\Gamma(1/2+\nu/2-s/2)\Gamma(1-\nu/2-s/2)\Gamma(1+\nu/2-s/2)}$$

という結果をも得ることができる．ところが（*6.96*）を導いた方法を用いると

$$\int_0^\infty x^{s-1}e^{ix}J_\nu(x)\,dx=e^{i\pi s/2}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}J_\nu(ix)\,dx$$

$$=e^{(s+\nu)\pi i/2}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}I_\nu(x)\,dx$$

となる．倍法公式（*1.24*）を使ってこれらの関係をまとめると

$$\int_0^\infty e^{-x}I_\nu(x)\,x^{s-1}\,dx=\frac{\Gamma(s+\nu)\Gamma(1/2-s)}{2^s\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+\nu-s)},\quad \boldsymbol{R}(s)<1/2,\ \boldsymbol{R}(s+\nu)>0$$

となる．この結果を使って $J_{2\nu}(ax)\,e^{-bx^2}$ を $(0,\infty)$ で積分した値を求めてみよう．まずたたみこみ定理によって

$$\int_0^\infty J_{2\nu}(ax)\, e^{-bx^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a^{-s}\, 2^{s-2}\, \frac{\Gamma(\nu+s/2)}{\Gamma(\nu-s/2+1)} \cdot b^{s/2-1/2}\, \Gamma(1/2-s/2)\, ds$$

となるが，$s = 2s'$ とおけば右辺は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \frac{1}{2\sqrt{b}}\, \frac{\Gamma(\nu+s)\Gamma(1/2-s)}{\Gamma(1+\nu-s)} \left(\frac{a^2}{4b}\right)^{-s} ds$$

となる．これと上に得た結果を比較すれば，考えている積分は

$$\int_0^\infty J_{2\nu}(ax)\, e^{-bx^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{b}\right)^{1/2} e^{-a^2/8b}\, I_\nu(a^2/8b)$$

であることが分かる．

演 習 問 題

1.　a, b を実数とするとき，メリン変換のたたみ込み定理を用いて

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(a+s)\Gamma(b-s)\, ds = 2^{-a-b}\, \Gamma(a+b), \qquad -a < c < b$$

が成立することを証明せよ．またこれから

$$\int_0^\infty |\Gamma(a+it)|^2\, dt = 2^{-2a}\, \pi\Gamma(2a), \qquad a > 0$$

を導け．

2.　円柱座標 (r, θ, z) でのヘルムホルツの方程式

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2 E = 0$$

の解で z に依存せず，かつ境界条件

$$E + E_0\, e^{-ika\cos\theta} = 0, \qquad r = a$$

とゾンマーフェルドの輻射条件

$$E = O(r^{-1/2}), \quad \lim_{r\to\infty} r^{1/2}\left(\frac{\partial E}{\partial r} + ikE\right) = 0$$

を満たすものは

$$E = -E_0\left\{\frac{J_0(ka)}{H_0^{(2)}(ka)}\, H_0^{(2)}(kr) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)}\, H_n^{(2)}(kr)\cos n\theta\right\}$$

で与えられることを示せ，ただし k, E_0 は定数とする．

3.　二つの平板 $z = 0$, $z = d$ の温度がそれぞれ $T = 0$, $T = f(r)$ に保たれているとする．ただし $f(r)$ は平板 $z = d$ の中心からの距離 r の与えられた関数である．二つの平板で囲まれた媒質中の定常温度分布を求めよ．

7 章
マシュー関数とその応用

7.1 マシュー の微分方程式

7.1.1 楕円柱座標でのラプラス方程式　直角座標を (x, y, z) とするとき

$$x = k \cosh \xi \cos \eta, \quad y = k \sinh \xi \sin \eta, \qquad \zeta = z \tag{7.1}$$

によって定義される座標系 (ξ, η, ζ) を楕円柱座標とよんでいる．この座標系と直角座標系との関係を見るために，(7.1) から η を消去すれば

$$\frac{x^2}{k^2 \cosh^2 \xi} + \frac{y^2}{k^2(\cosh^2 \xi - 1)} = 1$$

を得る．したがって $\xi =$ 一定の曲面は半長径が $k \cosh \xi$, 焦点を $(\pm k, 0)$ にもつ楕円柱である．また ξ を消去すれば

$$\frac{x^2}{k^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{k^2 \sin^2 \eta} = 1$$

を得るが，これは双曲面の方程式である．

さてラプラス方程式 (5.10) で未知関数 V は z については $e^{-\alpha|z|}$ $(\alpha > 0)$ の形をしていると仮定すれば，それは

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \alpha^2 V = 0$$

となる．この方程式を楕円柱座標 (7.1) で表わすとき

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \alpha^2 k^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta) V = 0 \tag{7.2}$$

となることを示すことができる．$V(\xi, \eta) = f(\xi) g(\eta)$ と変数分離すれば

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + (\alpha^2 k^2 \cosh^2 \xi - \lambda) f = 0, \quad \frac{d^2 g}{d\eta^2} - (\alpha^2 k^2 \cos^2 \eta - \lambda) g = 0 \tag{7.3}$$

という二つの方程式を得る，ここに λ は分離定数である．第一の方程式で ξ の代りに $i\xi$ とすれば，それは形式的に第二の方程式と同じになる．これら

二つの方程式は a, q を定数として

$$\frac{d^2u}{dz^2}+(a-2q\cos 2z)u=0 \tag{7.4}$$

という2階常微分方程式にまとめ上げることができる．これはマシュー (Mathieu) 方程式とよばれ，その周期解は一般にマシュー関数とよばれている．

さてポテンシャル関数 V は (x, y, z) の一価関数であるから，関数 $g(\eta)$ は周期 2π の周期関数でなくてはならない．一般の α, λ の値に対して $g(\eta)$ は必ずしも周期関数とならないから，α, λ の可能な値はこの条件によって定まることになる．

7.1.2 天体力学におけるヒルの方程式　マシュー方程式 (7.4) と類似の微分方程式は天体力学にも現われる．二つの有限な質量 M_1, M_2 をもつ質点がそれらの重心の回りに円運動をしているとし，それらの重力のもとに運動する質量の非常に小さい質点を考える．その質点の運動を求める問題は制限三体問題とよばれている．M_1, M_2 を結ぶ直線は慣性系に関して角速度 n で回転する，ここに n と M_1 と M_2 の距離 R はケプラー (Kepler) の法則

$$G(M_1+M_2)=n^2R^3$$

によって関係づけられている．この直線を x 軸，それに垂直で重心を通る直線を y 軸にとれば，第三の質点の (x, y) 面内の運動は方程式

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{x}-2n\dot{y}-n^2x=-\frac{\partial V}{\partial x},\quad \ddot{y}+2n\dot{x}-n^2y=-\frac{\partial V}{\partial y},\\&V=-G(M_1/\rho_1+M_2/\rho_2)\end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

に従う，ただし ρ_1 と ρ_2 は質点と M_1, M_2 の間の距離であり，・は時間 t に関する微分を示す．最初の方程式に $\dot{x}$ を掛け，第二の方程式に $\dot{y}$ を掛けて辺々加えると

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=-2V(x, y)+n^2(x^2+y^2)-c \tag{7.6}$$

という第一積分を得る，ただし c は積分の定数である．(7.6) はヤコビ (Jacobi) の積分，c はヤコビの定数とよばれている．

さて第三質点の運動は運動方程式 (7.5) によって完全に定まるが，可能な軌道のうちで，周期的に同一の軌道を画くものを周期解とよぶ．制限三体問

題における周期解は無限個存在するが，いまそれらのうちの一つが見つかったとして，その周期解は (x_0, y_0) を通過するとする．そして与えられた周期解と同一のヤコビ積分の値をもち，(x_0, y_0) を通過する軌道を考える．運動方程式 (7.5) は二つの2階微分方程式であるから，四つの初期条件によって運動は完全に定まる．そのような軌道は∞個存在する．それらのうちで与えられた周期解のごく近傍にあるもののみを考える．$t=0$ に (x_0, y_0) を通過し，周期解に沿って運動する質点（質量は無限小）と，$t=0$ に (x_0, y_0) を通過し周期解近傍の軌道をとる他の質点を仮想的に考え，それらの距離を $\boldsymbol{d}$ としよう．$\boldsymbol{d}$ は周期解の接線方向の成分 δs と法線方向の成分 δp に分解することができる．$\boldsymbol{d}$ の絶対値が，周期軌道と M_1, M_2 との距離に比べて十分小さく，二次以上の項を無視できるとき，δp は方程式

$$\frac{d^2\delta p}{dt^2}+\Theta\,\delta p=0, \quad \Theta=n^2+3(\dot{\phi}+n)^2+\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \tag{7.7}$$

の解として与えられることをヒル (Hill) は示した．ここで ϕ は周期軌道の接線が x 軸となす角度であり，$\partial/\partial p$ は法線方向の微分を表している．周期軌道は x 軸に関して対称であるから，$t=0$ に軌道は x 軸と交るとすれば

$$\Theta(t)=\Theta(-t), \quad \Theta\left(\frac{T}{2}+t\right)=\Theta\left(\frac{T}{2}-t\right)$$

という性質をもつ，ここに T は周期軌道の周期である．ゆえに Θ は

$$\Theta=\theta_0+2\sum_{k=1}^{\infty}\theta_k\cos 2kz, \quad z=\frac{2\pi t}{T} \tag{7.8}$$

と表わし得る．このようにマシュー方程式はヒルの方程式 (7.7) の特別な場合であるので，以下ではヒル方程式の一般的性質を考察し，そのあとでマシュー方程式の解にもどることにする．

7.1.3 ポアンカレの特性指数　$\Theta(z)$ は (7.8) の形で与えられる周期関数とするとき

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\Theta(z)u=0 \tag{7.9}$$

をヒルの方程式とよぶ．この方程式に対してフロケー (Floquét) の定理が成り立つ．

定理　ヒルの方程式 (7.9) の一般解は

$$u(z) = e^{\mu z}u_1(z) + e^{-\mu z}u_2(z) \tag{7.10}$$

で与えられる，ここに $u_1(z)$, $u_2(z)$ は $\theta(z)$ と同一の周期をもつ周期関数であり，μ は定数であってポアンカレ (Poincaré) の特性指数とよばれる．

[証明]　$\theta(z)$ の周期を T とし，(7.9) の二つの基本解を $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ とすれば $\phi_1(z+T)$, $\phi_2(z+T)$ も (7.9) の解である．したがって

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(z) \equiv \phi_1(z+T) = \alpha\phi_1(z) + \beta\phi_2(z)\\ \Phi_2(z) \equiv \phi_2(z+T) = \gamma\phi_1(z) + \delta\phi_2(z)\end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

と表わせる．またヒルの方程式から

$$\phi_1''(z)\phi_2(z) - \phi_2''(z)\phi_1(z) = 0$$

が導かれ，これを z について積分すれば

$$\begin{aligned}\phi_1'(z)\phi_2(z) - \phi_1(z)\phi_2'(z) = \text{定数} &= \Phi_1'(z)\Phi_2(z) - \Phi_2'(z(\Phi_1(z)\\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)[\phi_2(z)\phi_1'(z) - \phi_1(z)\phi_2'(z)]\end{aligned}$$

を得る．ゆえに $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ を得る．いま ϕ_1, ϕ_2 とは別の基本解の組 ψ_1, ψ_2 をとれば

$$\phi_1(z) = a\psi_1(z) + b\psi_2(z), \quad \phi_2(z) = c\psi_1(z) + d\psi_2(z) \tag{7.12}$$

と表わせる．これらの等式を使って $\psi_1(z+T)$, $\psi_2(z+T)$ を計算すると

$$\left.\begin{aligned}&\Psi_1(z) \equiv \psi_1(z+T) = A\psi_1(z) + B\psi_2(z),\\ &\Psi_2(z) = C\psi_1(z) + D\psi_2(z)\\ &\quad (ad-bc)A = ad\,\alpha + cd\,\beta - ab\,\gamma - bc\,\delta\\ &\quad (ad-bc)B = bd(\alpha-\delta) + d^2\beta - b^2\gamma\\ &\quad (ad-bc)C = -ac(\alpha-\delta) - c^2\beta + a^2\gamma\\ &\quad (ad-bc)D = -bc\,\alpha - cd\,\beta + ab\,\gamma + ad\,\delta\end{aligned}\right\} \tag{7.13}$$

となる．これからただちに

$$A + D = \alpha + \delta, \quad AD - BC = 1$$

が出てくる．したがって (7.11) で定義される係数の和 $\alpha+\delta$ は基本解のとり方には無関係である．いま (7.13) で $B = C = 0$ となるように b/d, a/c をとれば，それに応じて基本解の組 $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ は定まる．そのとき

$$\psi_1(z+T) = A\psi_1(z), \quad \psi_2(z+T) = D\psi_2(z), \quad AD = 1$$

が成り立つ．すなわち $\psi_1(z)$ は z が T だけ増す毎に定数倍となる．そのような関数は $u_1(z)$ を周期関数としたとき

$$\psi_1(z)=e^{\mu z}u_1(z)$$

と表わせる．$\psi_2(z)$ についても同様である．こうしてフロケーの定理は証明された．

この結果を使えば二つの基本解が既知のとき，特性指数を求める方法が導かれる．まず (7.9) の二つの基本解 $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ は初期条件

$$\phi_1(0)=1,\ \phi_1'(0)=0;\quad \phi_2(0)=0,\ \phi_2'(0)=1$$

を満足するものとする．$\phi_1(z)$ と $\phi_2(z)$ はそれぞれ z の偶，奇関数であるから

$$\phi_1(T)=\phi_1(-T),\qquad \phi_2(T)=-\phi_2(-T),$$
$$\phi_1'(T)=-\phi_1'(-T),\quad \phi_2'(T)=\phi_2'(-T)$$

が成り立つ．(7.10) およびそれを微分したもので $z=-T/2$ とおけば

$$\phi_1\left(\frac{T}{2}\right)=\alpha\phi_1\left(\frac{T}{2}\right)-\beta\phi_2\left(\frac{T}{2}\right),\qquad \phi_2\left(\frac{T}{2}\right)=\gamma\phi_1\left(\frac{T}{2}\right)-\delta\phi_2\left(\frac{T}{2}\right),$$
$$\phi_1'\left(\frac{T}{2}\right)=-\alpha\phi_1'\left(\frac{T}{2}\right)+\beta\phi_2'\left(\frac{T}{2}\right),\quad \phi_2'\left(\frac{T}{2}\right)=-\gamma\phi_1'\left(\frac{T}{2}\right)+\delta\phi_2'\left(\frac{T}{2}\right)$$

が得られ，これからただちにつぎの等式を得る；

$$\frac{\phi_1}{\phi_2}=\frac{\beta}{\alpha-1}=\frac{\delta+1}{\gamma},\quad \frac{\phi_1'}{\phi_2'}=\frac{\beta}{\alpha+1}=\frac{\delta-1}{\gamma},$$

ここに ϕ,ϕ' は $z=T/2$ での値をとるものとする．$\phi_1\phi_2'-\phi_1'\phi_2=1$ とこの関係から

$$\alpha=\delta=\phi_2\phi_1'+\phi_1\phi_2'$$

を得る．他方 (7.12) により k と A, D, α, δ の間には

$$A=e^{\mu T},\quad D=e^{-\mu T},\quad A+D=\alpha+\delta=2\cosh\mu T$$

という関係が存在する．したがって特性指数 μ は

$$\cosh\mu T=\phi_2\left(\frac{T}{2}\right)\phi_1'\left(\frac{T}{2}\right)+\phi_1\left(\frac{T}{2}\right)\phi_2'\left(\frac{T}{2}\right)$$

によって与えられる．この結果はハウ (Hough) による．

7.1.4 ヒルの無限行列式　ヒルの方程式 (7.9) の解を解析的に求める方法は最初ヒル自身によって示された．その方程式に現われる Θ を

$$\Theta(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\theta_k e^{2ikz},\quad \theta_k=\theta_{-k} \tag{7.14}$$

と表わしておこう．フロケーの定理により解は (7.10) の形をとるから $u(z)$ を

$$u(z)=e^{\mu z}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}b_k\,e^{2ikz} \tag{7.15}$$

と表わすことができる．展開係数と特性指数を計算するために (7.14), (7.15) をヒルの方程式に代入すれば

$$\sum_k(\mu+2ik)^2\,b_k\,e^{2ikz}+\sum_k\sum_{k'}\theta_{k'}b_k\,e^{2i(k+k')z}=0$$

となる．この等式の指数関数べきの係数比較をすれば無限個の1次方程式

$$(i\mu-2k)^2\,b_k-\sum_{k'}\theta_{k'}\,b_{k-k'}=0,\qquad i^2=-1, \tag{7.16}$$

を得る．この方程式のすべては0でない解 $b_k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ が存在するためには行列式

$$D(i\mu)\equiv\begin{vmatrix}[-2], & -\theta_1, & -\theta_2, & \cdots & & & \\ -\theta_1, & [-1], & \theta_1, & -\theta_2, & -\theta_3, & \cdots & \\ -\theta_2, & -\theta_1, & [0], & -\theta_1, & -\theta_2, & \cdots & \\ -\theta_3, & -\theta_2, & -\theta_1, & [1], & -\theta_1, & -\theta_2, & \cdots \\ \vdots & -\theta_3, & -\theta_2, & -\theta_1, & [2], & & \\ & \vdots & \vdots & & & & \end{vmatrix} \tag{7.17}$$

$$[k]\equiv(i\mu-2k)^2-\theta_0$$

の値が0でなくてはならない．これが有名なヒルの無限行列式である．この無限行列式は $\sum\theta_k$ が絶対収束する場合でも収束しないので，絶対収束する行列式を得るには (7.16) を少し変形する必要がある．しかしここでは数学的厳密性にこだわらずに，ヒルの理論に従うことにしよう．この行列式の値を求めるためにまず

$$D(i\mu+2j)=D(i\mu),\qquad j=\pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

に注意しよう．この関係が成り立つことは (7.17) から明らかである．したがってもし $i\mu_0$ が $D(\mu)$ の一つの零点であれば，$i\mu_0+2j$ ($j=\pm1,\pm2,\cdots$) もまた零点である．また (7.16) で b_k のかわりに b_{-k}, $i\mu$ のかわりに $-i\mu$ とおいても方程式の形は変わらないから，零点 $i\mu_0$ と $-i\mu_0$ とはつねに一対となっている．このような性質を方程式

$$\cos(i\mu\pi)=\cos(i\mu_0\pi)$$

はもつから，A を定数として

$$D(i\mu)=A[\cos(i\mu\pi)-\cos(i\mu_0\pi)]$$

と表わせる．係数Aを定めるためにヒルはつぎのような手法を用いた．$\cos\pi z$ は $z=k+1/2,\ k=0,\ \pm1,\pm2,\ \cdots$ で0となるから無限乗積として表現すれば

$$\cos\pi z=(1-4z^2)\left(1-\frac{4}{9}z^2\right)\left(1-\frac{4}{25}z^2\right)\cdots$$

となる．したがって係数 A は $D(i\mu)$ に現われる $i\mu$ の最高べきの係数と $\cos(i\mu\pi)$ の最高べきの係数が等しくなるように定まるべきである．この考えに従って計算すれば A は無限大となるので，$D(i\mu)$ のかわりに (7.17) で [0] を含む行を -4 倍し，[1] と [-1] を含む行を 4/15 倍し，[i], [$-i$] を含む行を $4/[(4i)^2-1]$ 倍して得られる行列式 $\nabla(i\mu)$ を考える．そうすれば $D(i\mu)$ と $\nabla(i\mu)$ の零点は一致するから，それを

$$\nabla(i\mu)=B[\cos(i\mu\pi)-\cos(i\mu_0\pi)]$$

と表わせる．ところが $\nabla(i\mu)$ の中心の $(2n+1)\times(2n+1)$ 個の要素から作られる行列式の最高次の項は

$$(\mu^2)^{2n+1}\,4\cdot\frac{16}{125}\cdot\cdots\frac{16}{(16n^2-1)^2}$$

であり，他方 $\cos(i\mu\pi)$ を乗積として表し最初の $2n+1$ 項をとったときの最高次の項はこれに等しい．ゆえに $B=1$ を得る．こうして

$$\nabla(i\mu)=\cos(i\mu\pi)-\cos(i\mu_0\pi)$$

という結果が得られた．これは μ の値に関係なく成り立つから $\mu=0$ とおけば μ_0 の値が定まる；

$$1-\nabla(0)=\cos(i\mu_0\pi).$$

したがって

$$\nabla(i\mu)=\cos(i\mu\pi)+\nabla(0)-1$$

となり，μ は方程式

$$\nabla(i\mu)\equiv\cos(i\mu\pi)+\nabla(0)-1=0 \tag{7.18}$$

の根として与えられる．

この方程式をより見やすい形に変形するためにつぎのことに注意しよう．(7.16) で $\theta_k=0$ ($k=\pm1,\pm2,\cdots$) であるとき，(7.18) の根は

$$i\mu = \pm\sqrt{\theta_0}+2k, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

であるから，$\nabla(0)$ は

$$\nabla(0) = 1-\cos(\sqrt{\theta_0}\,\pi) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)$$

によって与えられる．ところがこのとき行列式 $\nabla(0)$ は対角要素のみが 0 とは異なるから，$\nabla(0)$ はそれの対角要素の積に等しい．したがって $\theta_k(k=\pm 1, \pm 2, \cdots)$ の値が何であれ

$$\text{対角要素の積} = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)$$

という関係が成立する．さてある行または列を定数倍した行列の行列式の値はもとの行列式を定数倍したものに等しい．それゆえ $\nabla(0)$ の各行を，対角線上にある行列要素で割って得られる行列の行列式を $\square(0)$ とすれば，それは

$$\nabla(0) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)\square(0)$$

によって与えられる．このように定義された $\square(0)$ の要素の一部分を書けばつぎのようになる；

$$\square(0) \equiv \begin{vmatrix} & \vdots & , & \cdots, & \cdots, & \cdots, & \\ \cdots, & -\dfrac{\theta_1}{2^2-\theta_0}, & 1, & -\dfrac{\theta_1}{2^2-\theta_0}, & -\dfrac{\theta_2}{2^2-\theta_0}, & -\dfrac{\theta_3}{2^2-\theta_0}, & \cdots \\ \cdots, & -\dfrac{\theta_2}{0^2-\theta_0}, & -\dfrac{\theta_0}{0^2-\theta_0}, & 1, & -\dfrac{\theta_1}{0^2-\theta_0}, & -\dfrac{\theta_2}{0^2-\theta_0}, & \cdots \\ \cdots, & -\dfrac{\theta_2}{2^2-\theta_0}, & -\dfrac{\theta_2}{2^2-\theta_0}, & -\dfrac{\theta_1}{2^2-\theta_0}, & 1, & -\dfrac{\theta_1}{2^2-\theta_0}, & \cdots \\ \cdots, & -\dfrac{\theta_4}{4^2-\theta_0}, & -\dfrac{\theta_3}{4^2-\theta_0}, & -\dfrac{\theta_2}{4^2-\theta_0}, & -\dfrac{\theta_1}{4^2-\theta_0}, & 1, & \cdots \end{vmatrix}. \tag{7.19}$$

また $\square(0)$ を用いて (7.18) を書き直せば

$$\frac{\sin^2(i\mu\pi/2)}{\sin^2(\pi\sqrt{\theta_0}/2)} = \square(0) \tag{7.20}$$

となり，特性指数はこの方程式の根として与えられる．μ の値が定まると，b_k のうち一つを任意に与えれば，他の係数は逐次 (7.16) によって求められる．

7.2 マシュー関数

7.2.1 マシュー方程式の周期解 マシュー方程式

$$\frac{d^2u}{dz^2}+(a-2q\cos 2z)u=0 \tag{7.21}$$

の周期 2π をもつ周期解をマシュー関数とよぶ．これはヒルの微分方程式 (7.9) の特別な場合であるから，周期解をもつためには特性指数 μ の値が 0 でなければならず，そのためには行列式 $\square(0)$ が 0 でなければならない．それは a と q の関係を与える．このようにヒルの理論を応用してマシュー方程式の周期解を求めることは可能であるが，ここでは初等的な方法によって解を求めてみよう．

まず $q=0$ のとき，(7.21) は簡単化できて $u''+au=0$ となるから，その解が周期 2π をもつためには $a=m^2$ (m: 整数) でなければならない．したがって (7.21) の周期解については a を

$$a=m^2+\alpha_1q+\alpha_2q^2+\alpha_3q^3+\cdots$$

という級数に表現できるものと仮定して，係数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ を逐次求めることとする．いま特別な場合として $m=1$ をとり，$q=0$ のときの一つの周期解 $\cos z$ を考える．そして

$$\left.\begin{aligned} u(z)&=\cos z+qc_1(z)+q^2c_2(z)+\cdots \\ a&=1+\alpha_1q+\alpha_2q^2+\cdots \end{aligned}\right\} \tag{7.22}$$

とおいて，未知の周期関数 $c_1(z), c_2(z),\cdots$ と $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ を定めることにしよう．まず (7.22) を微分方程式 (7.21) に代入すれば

$$-\cos z+qc_1''+q^2c_2''+\cdots+(1+\alpha_1q+\alpha_2q^2+\cdots$$
$$-2q\cos 2z)(\cos z+qc_1+\cdots)=0$$

となる．q の 0 次と 1 次のべきの係数を比較すれば

$$q^0 \qquad -\cos z+\cos z=0$$
$$q^1 \qquad c_1''+c_1-\cos 3z+(\alpha_1-1)\cos z=0$$

を得る．第二の方程式の解 c_1 は $(\alpha_1-1)\cos z$ に対する特殊解，$-\cos 3z$ に対する特殊解と，$c_1''+c_1=0$ の一般解の和である．ところが $(\alpha_1-1)\cos z$ にたいする特殊解は $(1-\alpha_1)z\sin z/2$ であって，これは周期関数でないから

$$\alpha_1=1,$$

でなければならない．さて A, m が与えられたとして

$$v''(z)+v(z)=A\cos mz$$

の特殊解は $v(z)=-A\cos mz/(m^2-1)$ であるから，$-\cos 3z$ に対する特殊解は $-\cos 3z/8$ である．他方一般解は $\sin z$ と $\cos z$ であるが，$\sin z$ は後に述べる理由で除外される．また (7.22) で $\cos z$ の係数は常に1であると約束することにすれば，この項も 0 でなければならない．こうして c_1 が求められた；

$$c_1(z)=-\frac{1}{8}\cos 3z.$$

そのつぎに q^2 の係数を 0 とおけば

$$c_2''+c_2-\frac{1}{8}\cos 3z+\frac{1}{8}\cos 5z+\left(\frac{1}{8}+\alpha_2\right)\cos z=0$$

となり，まえと同様にして $\alpha_2=-1/8$ を得る．このときの特殊解は

$$c_2(z)=-\frac{1}{64}\cos 3z+\frac{1}{192}\cos 5z$$

となる．この手順をくり返し用いると関数 $c_1(z), c_2(z), c_3(z), \cdots$ と係数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ がつぎつぎに求められる．このようにして得た解を

$$\left.\begin{aligned} ce_1(z,q)&=\cos z-\frac{1}{8}q\cos 3z+\frac{1}{64}q^2\left(-\cos 3z+\frac{1}{3}\cos 5z\right)\\ &\qquad-\frac{1}{512}q^3\left(\frac{1}{3}\cos 3z-\frac{4}{9}\cos 5z+\frac{1}{18}\cos 7z\right)+\cdots\\ a&=1+q-\frac{1}{8}q^2-\frac{1}{64}q^3-\frac{1}{1536}q^4+\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (7.23)$$

で表わし，余弦楕円関数とよぶ．この a はマシュー方程式の固有値とよばれる．また (7.21) の周期解で $q\to 0$ のとき $\sin z$ に還元される関数を正弦楕円関数とよび，$se_1(z)$ で表わす．それと固有値 a は

$$\left.\begin{aligned} se_1(z)&=\sin z-\frac{1}{8}q\sin 3z+\frac{1}{64}q^2\left(\sin 3z+\frac{1}{3}\sin 5z\right)\\ &\qquad-\frac{1}{512}q^2\left(\frac{1}{3}\sin 3z+\frac{4}{9}\sin 5z+\frac{1}{18}\sin 7z\right)+\cdots\\ a&=1-q-\frac{1}{8}q^2+\frac{1}{64}q^3-\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (7.24)$$

で与えられる．また (7.21) の周期解で $q\to 0$ のとき $\cos mz$, $\sin mz$ (m:

整数）となる関数を $ce_m(z)$, $se_m(z)$ で表される．これらの級数展開はホイッテカー（Whittaker）が最初求めた．

7.2.2 マシュー関数の直交関係　マシュー方程式の周期解 se_m と ce_m は m と q によって定まるから，それらを $se_m(z,q)$, $ce_m(z,q)$ のように q への依存を陽に表わすことにしよう．このときそれらの間には直交性の関係

$$\int_0^{2\pi} ce_m(z,q)\,ce_m(z,q)\,dz=0,\quad \int_0^{2\pi} se_m(z,q)\,se_m(z,q)\,dz=0,\quad m\neq n$$

$$\int_0^{2\pi} ce_m(z,q)\,se_m(z,q)\,dz=0,\qquad m,\ n\geq 0 \tag{7.25}$$

が成立する．これらの関係を証明するのは容易である．ce_m, ce_n の固有値をそれぞれ a_m, a_n とすれば，それらは

$$u_1''+(a_m-2q\cos 2z)u_1=0,$$
$$u_2''+(a_n-2q\cos 2z)u_2=0$$

を満足するから

$$\frac{d}{dz}\left\{u_2\frac{du_1}{dz}-u_1\frac{du_2}{dz}\right\}=(a_n-a_m)u_2u_1$$

が成り立つ．両辺を $(0,2\pi)$ で積分し，$u_1(z)$ と $u_2(z)$ は周期関数であることと，$a_m\neq a_n(m\neq n)$ に注意すれば，(7.25) の最初の二つの結果が得られる．u_1 と u_2 が se_m, se_n であるときには $n=m$ であっても $a_m\neq a_n$ である．ゆえに第三の関係が得られる．

7.2.3 マシュー方程式の固有値　マシュー方程式の固有値は種々の応用で重要であるので，それを与える方程式を求めておこう．(7.23), (7.24) で与えられるホイテッカー級数は q が十分小さいとき収束するが，q が大きいと発散する．したがって q の値に関係なく収束する解（固有関数）を求める必要がある．求める解は周期解であるから，それをフーリェ級数に展開するのが，もっとも自然である．そこで

$$u(z)=ce_{2n}(z,q)=\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r}^{(2n)}\cos 2rz \tag{7.26}$$

とおいて，これを (7.21) に代入し展開係数 $A_{2r}^{(2n)}$ の漸化式を求めれば

$$\left.\begin{aligned}aA_0-qA_2&=0\\(a-4)A_2-q(A_4+2A_0)&=0\\(a-4r^2)A_{2r}-q(A_{2r+2}+A_{2r-2})&=0\end{aligned}\right\}\tag{7.27}$$

を得る．この漸化関係で $v_0=A_2/A_0$, $v_2=A_4/A_2$ とおけば，最初の関係は

$$-v_0=\frac{q}{2}\left[1-\frac{1}{4}(a-qv_2)\right]^{-1}$$

と表わせる．同じようにして

$$v_{2r-2}=\frac{A_{2r}}{A_{2r-2}},\quad v_{2r}=\frac{A_{2r+2}}{A_{2r}}\qquad r=1,2,3,\cdots$$

とおけば，漸化関係は

$$-v_{2r-2}=\frac{q}{4r^2}\frac{1}{1-\dfrac{1}{4r^2}(a-qv_{2r})},\qquad r=2,3,4,\cdots$$

となり，これと v_0 を与える等式から

$$-v_0=\frac{q}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{a}{4}-\dfrac{q^2}{64}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{16}(a-qv_4)}}$$

という関係が得られる．この過程をくり返し用い，また　$v_0=A_2/A_0=a/q$ であることに注意すれば，上の関係は連分数を使って

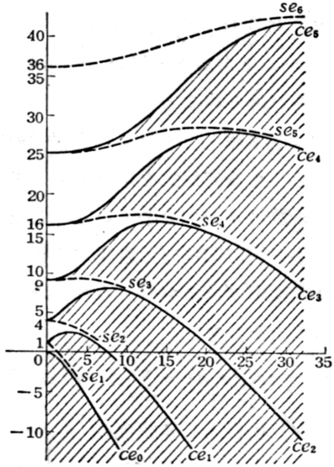


図 7.1　マシュー方程式の固有値 a をパラメター q の関数として画いたグラフ ce_n は楕円余弦関数 $ce_n(z,q)$ に対応する固有値，se_n は楕円正弦関数 $se_n(z,q)$ に対応する固有値．斜線の部分は不安定領域を示す．横軸は q，縦軸は a を表わす．

$$a=\cfrac{-\frac{q^2}{2}}{1-\frac{a}{4}-\frac{q^2}{64}\cfrac{1}{1-\frac{a}{16}-\frac{q^2}{576}\cdot\cfrac{1}{1-\frac{a}{36}-\frac{q^2}{2304}-\cdots}}} \tag{7.28}$$

とわ表すことができる．この連分数は無限に続くから，qが与えられたとき，これは固有値aについての超越方程式である．固有値aが求められたとき，それに対応する固有関数は展開係数を（7.27）によって逐次計算することによって得られる．同じようにして $ce_{2n+1}(z,q)$，$se_{2n}(z,q)$，$se_{2n+1}(z,q)$ も求めることができる．超越方程式（7.28）によって与えられるqとaの関係が図 7.1 に示してある．

7.2.4 量子力学への応用　量子力学におけるシュレーディンガー（Schrödinger）の波動方程式は，h をプランクの定数，m を考えている粒子の質量，$V(\boldsymbol{x})$ を粒子に働く力の場のポテンシャルとしたとき

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+V(x,y,z)\psi,\ \ \hbar=\frac{h}{2\pi} \tag{7.29}$$

である．ただし $\psi(\boldsymbol{x},t)$ は粒子の波動関数である．定常状態では粒子はある定まったエネルギー E をもち，波動関数は $\psi(\boldsymbol{x},t)=\psi(\boldsymbol{x})\exp[-iEt/\hbar]$ と表わされる．このとき波動方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+V(x,y,z)\psi=E\psi \tag{7.30}$$

となる．さて結晶は原子が格子点上に規則正しく配列したものであるから，結晶内部を運動する電子に作用するポテンシャルは位置の周期関数である．簡単のため1次元結晶を考えれば，それは近似的に

$$V(x)=V_0\cos\frac{2\pi x}{L},\qquad V_0=\text{定数}$$

で与えられる，ただし L は結晶の格子間隔である．いま $z=\pi x/L$ とおけば波動方程式（7.30）はつぎのようになる；

$$\frac{d^2\psi}{dz^2}+\frac{8mL^2}{\hbar^2}(E-V_0\cos 2z)\psi=0. \tag{7.31}$$

これはマシュー方程式 (7.21) そのものである．

さて定常状態に対応する波動関数 $\psi(x)$ は $x\to\pm\infty$ のときに有界でなければならない．ところがフロケーの定理によって，マシュー方程式の一般解は(7.10) の形をもつから，この条件が満たされるためには特性指数 μ は純虚数でなければならない．それゆえ上の方程式でエネルギー E は任意の値をとることはできない．

E のとり得る値を見出すために，特性指数の決定方程式

$$\sin^2\left(\frac{i\mu\pi}{2}\right)=\Box(0)\sin^2\left(\frac{\pi\sqrt{\theta_0}}{2}\right)$$

を考える．ここで $\Box(0)$ は (7.19) で $\theta_0=a,\ \theta_1=-q,\ \theta_k=0(k=\pm2,\pm3,\cdots)$ とおいた行列式である．7.2.3 項で求めた解は $\mu=0$ に対応するものであるから，(7.28) で与えられる a と q の関係は $\Box(0)=0$ と等値である．さて上の特性指数方程式を

$$\sinh^2\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)=-\Box(0)\sin^2\left(\frac{\pi\sqrt{\theta_0}}{2}\right)$$

と書き直せば，$\Box(0)>0$ のとき $i\mu$ は実数，$\Box(0)<0$ のとき μ は実数であることが分かる．したがって特性指数が虚数であるための必要十分条件は $\Box(0)$ が正であることである．ところで図 7.1 に示される (q,a) 平面上の曲線は $\Box(0)=0$ の曲線であるから，その曲線は $\Box(0)>0$ の領域と $\Box(0)<0$ の領域に分割する．これらの領域のうちどれが平面を $\Box(0)>0$ に対応するかは，容易に調べることができる．マシュー方程式で $q=0$, $a=m^2$ (m: 実数) としたとき $\Box(0)=1$ となるから，(q,a) 平面の直線 $q=0$ 上では $\Box(0)>0$ である．そこで a の値をそのままとして q を増大すれば，曲線 $\Box(0)=0$ を横切り，そのとき $\Box(0)$ は符号を変える．このようにして平面は $\Box(0)\gtrless0$ の領域に分割される．$\Box(0)<0$ のときマシュー方程式の解 $u(x)$ は $x\to\pm\infty$ のとき有界ではないので，この領域を不安定領域とよび，それ以外の領域を安定領域とよぶ．

さて (7.31) はマシュー方程式で

$$a=\frac{8mL^2E}{\hbar^2},\quad q=\frac{4mL^2V_0}{\hbar^2}$$

とおいたものである．q は格子間隔が与えられれば定まる数であるから，波動方程式（7.31）の解が $z\to\pm\infty$ のとき有限であるためには a（したがって E）は安定領域になければならない．このような許されるエネルギーの領域は許容されるエネルギー・バンドとよばれている．

参　考　文　献

種々の特殊関数の理論の概要を得るためのもっとも標準的な参考書は

E. T. Whittaker & G. N. Watson: Modern Analysis (Cambridge University Press) 1965.（邦訳あり）と

寺沢寛一: 自然科学者のための数学概論（岩波書店）1955.

の二つであろう．本書で扱うことのできなかった楕円関数論，ヤコビ楕円関数論，シータ関数論はこれらで扱われている．またラメ関数論の概要も前者に含まれている．より詳しく知るには

F. W. Schäfke: Einführung in die Theorie der Speziellen Funktionen der Mathematischen Physik (Springer Verlag) 1963.

がある．ここには抱括的かつ近代的な取扱いが見られる．また

犬井鉄郎: 特殊関数（岩波書店）1967.

小松勇作: 特殊関数（朝倉書店）1973.

も本書で触れなかった部分を扱っている．

ベッセル関数についての広範な理論を扱ったものとしては

G. N. Watson: Theory of Bessel Functions (Cambridge University Press) 1962.

を第一に掲げることができる．詳細な数表も附されており，本書のベッセル関数のグラフはこれをもとに作った．ベッセル関数の応用面については

N. W. McLachlan: Bessel Functions for Engineers (Clarendon Press, Oxford) 1946.

がある．

ルジャンドル関数については

E. W. Hobson: Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics (Cambridge University Press) 1931.

がもっとも標準的である．

マシュー関数については本書ではわづかに触れただけであるので，理論と応用の詳細については

N. W. McLachlan: Theory and Application of Mathieu Function (Clarendon

Press, Oxford) 1951.
を参照されたい．この関数と深い関わりをもつヒルの方程式と行列式は最初

G. W. Hill: Acta Mathematica. vol. 8 (1886).

で議論された．

特殊関数の理論を目的としたものではないが

E. C. Titchmarsh: Theory of Fourier Integrals (Clarendon Press, Oxford) 1948.

では特殊関数の種々の公式が導かれている．6.3.3 と 6.3.4 項の一部はこれによる．

特殊関数の理論の概要と応用を扱ったものとしては

N. N. Lebedev: Special Functions and Their Applications (Prentice Hall) 1965.

H. Hochstadt: The Functions of Mathematical Physics (Wiley-Interscience) 1971 (邦訳あり).

がある．特に前者は種々の境界値問題の解を特殊関数を用いて求めていて，貴重な文献と云える．特殊関数そのものを目的とはしていないが，数理物理学の種々の問題を扱った教科書として

A. Sommerfeld: Partial Differential Equations of Physics (Academic Press) (邦訳あり) 1949.

がある．特殊関数の物理学への応用についての一通りの知識を得ることができる．

特殊関数が応用される一つの分野に熱伝導問題があるが，これについては

H. S. Carslaw & J. C. Jaeger: Conduction of Heat in Solids (Clarendon Press, Oxford) 1959.

がもっとも多くの問題を扱っている．このほかに

小平吉男：物理数学第二巻（文献社）1971.

も広範囲の問題を扱っている．つぎにポテンシャル論への特殊関数の応用で興味ある問題の一つに回転流体の安定性があるが，これについては

R. A. Lyttleton: The Stability of Rotating Liquid Masses (Cambridge University Press) 1953.

を参照されたい．

最近特殊関数と群論の関係が研究されているが，この分野では

J. Talman: Special Functions. A Group Theoretic Approach based on E. Wigner's Lecture (Benjamin) 1968.

N. J. Vilenkin: Special Functions and Their Group Representations (American Mathematical Society) 1968.

の二つを挙げることができる．

特殊関数の公式を集めたものとしては

森口繁一・宇田川銈久・一松信：数学公式Ⅲ（岩波書店）1960.

が利用し易い．しかしより多くの関数と公式を集めたものとして，H. Bateman の原稿をもとに編集された

A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger & F. G. Tricomi: Higher-Transcendental Functions, vol. Ⅰ～Ⅲ, Tables of Integral Transforms, vol. Ⅰ, Ⅱ (McGraw-Hill) 1954.

がある．特殊関数の公式のほとんどすべてはこれに網羅されている．

なお，本書では複素関数論の定理をところどころで証明なしに使ったが，それらについては

高木貞治：解析概論（岩波書店）1964.

E. C. Titchmarsh: Theory of Functions (Clarendon Press, Oxford) 1964.

を参照するのがよいであろう．

さ く い ん

J

K

L

M

N

著者略歴

藪下　信

1936 年　生れ
1958 年　京都大学卒業
1963 年　ケンブリッジ大学大学院修了（応用数学，理論物理学専攻）．
Ph. D. を授与さる．
その後エール大学，メリーランド大学での研究を経て
1965 年　京都大学講師
1967 年～現在　京都大学助教授
1970～71 年　ケンブリッジ大学理論天文学研究所・同大学フィッツウィリアム・カレッジ特別研究員
71 年夏　ESRO（欧州宇宙研究機構）客員科学者
専攻：応用数学，宇宙科学

特殊関数とその応用
© 藪下　信　*1975*

1975 年 12 月 1 日　第 1 版第 1 刷発行
1994 年 9 月 1 日　第 1 版第 7 刷発行

定価はカバー・ケースに表示してあります．

著者との協議により検印は廃止します．

著　者　藪（やぶ）　下（した）　信（しん）
発行者　森　北　肇
印刷者　小　笠　原　長　利

発行所　森北出版　株式会社
東京都千代田区富士見 1-4-11
電話 東京（3265）8341（代表）
FAX 東京（3264）8709
振替 東京 1-34757 郵便番号 102

日本書籍出版協会・自然科学書協会・工学書協会　会員

落丁・乱丁本はお取替えいたします
印刷　秀好堂印刷／製本　正明社

ISBN 4-627-00400-1

Printed in Japan

特殊関数とその応用　［POD版］

2005年4月15日　発行

著　者　藪下　信

発行者　森北　肇

発　行　森北出版株式会社
〒102-0071
東京都千代田区富士見1-4-11
TEL　03-3265-8341　FAX　03-3264-8709
http://www.morikita.co.jp/

印刷・製本　ブッキング
〒101-0062
東京都千代田区神田駿河台2-8

ISBN4-627-00409-5　Printed in Japan

JCLS ＜(株)日本著作出版権管理システム委託出版物＞